DETERMINAÇÃO DO INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A DOSE ECONÔNICA DE NUTRIENTE COM BASE EM EXPERIMENTOS DE ADUBAÇÃO (1)

Rodolfo Hoffmann
Sonia Vieira

1 - INTRODUÇÃO

Na análise econométrica de experimentos de adubação temos, basicamente, duas etapas:

1) ajustamento de uma função de produção;
2) determinação da(s) dose(s) econômica(s) do(s) nutriente(s).

É usual realizar uma análise estatística na primeira etapa, fazendo a análise de variância da regressão e determinando os intervalos de confiança para os parâmetros da função de produção. Na segunda etapa, entretanto, é comum deixar de lado os problemas estatísticos relativos aos erros experimentais aleatórios, limitando a análise à determinação puramente matemática do máximo da função de receita líquida. Esse procedimento é seguido, por exemplo, nos trabalhos clássicos de HEADY "et alii" (1961).

Sabemos que a dose econômica de um nutriente, baseada em dados experimentais, é uma variável aleatória. É importante, então, avaliar sua precisão, isto é, obter uma estimativa de sua variância ou determinar o intervalo de confiança para a verdadeira dose econômica. Devemos ressaltar que essa preocupação não é nova, como atesta o trabalho de GOMES, Pimentel (1961), onde se deduz um estimador da variância da dose econômica de nutriente determinada através de uma fórmula aproximada baseada na equação de Mitscherlich(2).

Neste trabalho mostraremos como obter o intervalo de confiança da dose econômica de nutriente determinada a partir das seguintes funções de produção:

$$y = a + bx + cx^2,$$

$$y = a + bx + c\sqrt{x}$$

e

$$y = a\left[1 - 10^{-c(X+b)}\right],$$

---

(1) Trabalho financiado pela Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), Convênio EMBRAPA-ESALQ/USP - Projeto Milho.

(2) Um outro estimador da variância da dose econômica obtida através da equação de Mitscherlich pode ser encontrado em VIEIRA e CAMPOS (1971).

onde y é a produção por unidade de área, em quilogramas por hectare, e x (ou X) é a quantidade de nutriente aplicada, em doses por hectare (ou em quilogramas por hectare).

Resultados de um conjunto de 50 ensaios fatoriais de adubação de milho serão utilizados para ilustrar a aplicação do método.

2 - MÉTODOS

2.1 - Os Modelos Utilizados

Seja y a produção de milho, em quilogramas por hectare, e seja x a quantidade de nutriente (N, P_2O_5 ou K_2O), em doses por hectare. Se q é o número de quilogramas correspondente a uma dose, a quantidade de nutriente em quilogramas por hectare é dada por X = qx.

Os modelos de função de produção estudados neste trabalho são:

a) Modelo quadrático

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + u_i, \qquad (1)$$

com b > 0 e c < 0.

b) Modelo com raiz quadrada

$$y_i = a + bx_i + c\sqrt{x_i} + u_i, \qquad (2)$$

com c > 0.

c) Equação de Mitscherlich

$$y_i = a\left[1 - 10^{-c(X_i+b)}\right] + u_i \qquad (3)$$

com a > 0, b > 0 e c > 0.

Nessas relações, os u_i são erros aleatórios que pressupomos independentes, com média zero e variância (σ^2) constante. Para determinar os intervalos de confiança da dose econômica, admitimos ainda que os u_i têm distribuição normal.

A equação de Mitscherlich pode ser colocada na seguinte forma, conhecida como equação de Spillman:

$$y_i = \alpha + \beta\rho^{x_i} + u_i \qquad (4)$$

Comparando (3) e (4), temos

$$\alpha = a ,$$

$$\beta = -a\ 10^{-cb} \tag{5}$$

e

$$\rho = 10^{-cq} \tag{6}$$

Se $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, temos $\alpha > 0$, $\beta < 0$ e $0 < \rho < 1$.

Normalmente existe produção mesmo que não sejam adicionados nutrientes ao solo, isto é, $a > 0$. As condições impostas aos valores dos demais parâmetros garantem, então, que a função de produção apresente um estágio racional, isto é, um intervalo em que o produto físico marginal é positivo e decrescente e o produto físico médio é decrescente e, portanto, maior do que o produto físico marginal.

Uma vez que a variável x representa, alternativamente, N, P_2O_5 ou K_2O, não estamos considerando possíveis interações entre os macronutrientes.

Sejam $\hat{a} = \hat{\alpha}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$ as estimativas de mínimos quadrados de $a = \alpha$, b, c, β e ρ, e seja $\hat{y}$ a produção estimada. Então temos, conforme o modelo adotado,

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}x^2 , \tag{7}$$

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}\sqrt{x} \tag{8}$$

e

$$\hat{y} = \hat{a}\left[1 - 10^{-\hat{c}(X+\hat{b})}\right] \tag{9}$$

ou

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\rho}^{x} \tag{10}$$

2.2 - A Função de Receita Líquida e a Dose Econômica de um Nutriente

Consideramos como nível economicamente ótimo de um nutriente aquele que maximiza a receita líquida do empreendimento.

A função de receita líquida é

$$L = w\ f(x) - px - K, \tag{11}$$

onde

a) f(x) é a produção obtida com a dose x de nutriente;

b) p é o preço da dose de nutriente, incluídos o custo variável de colocação do adubo no solo e os juros correspondentes ao período que decorre entre a adubação e a colheita, subtraídos os subsídios dados pelo governo;

c) K são os custos fixos, e

d) w = A - C, onde A é o preço pago ao produtor, na época da safra, por unidade do produto, no estabelecimento agrícola, e C é o custo variável de colheita e preparo do produto para a comercialização.

No caso do milho a importância relativa de C varia conforme a colheita e a debulha sejam feitas manual ou mecanicamente; no processo manual, predominam os custos variáveis, enquanto que no processo mecânico os custos fixos têm maior importância.

A condição necessária para que a receita líquida seja máxima é $\frac{dL}{dx} = 0$.

Considerando (11), obtemos

$$\frac{df(x)}{dx} = \theta \qquad (12)$$

onde $\theta = \frac{p}{w}$.

Seja x^* o valor de x que satisfaz a equação (12). Para que a receita líquida seja máxima no ponto de abcissa x^* é suficiente que, nesse ponto, $\frac{d^2f(x)}{dx^2} < 0$. Para que o valor de x^* possa ser considerado um nível economicamente ótimo de nutriente, é necessário que o valor da receita líquida não seja negativo, isto é,

$$wf(x^*) \geq px^* + K \qquad (13)$$

De (13) segue-se que

$$\frac{f(x^*)}{x^*} \geq \frac{p}{w} + \frac{K}{wx^*} \qquad (14)$$

De (12) e (14), obtemos

$$\frac{f(x^*)}{x^*} \geq \frac{dy}{dx} + \frac{K}{wx^*}$$

Essa condição só pode ser satisfeita se o produto físico médio, $\frac{f(x)}{x}$, for maior do que o produto físico marginal, $\frac{df(x)}{dx}$, isto é, se o valor de x^* estiver no estágio racional da função de produção.

Considerando as equações estimadas (7), (8), (9) e (10), obtemos, de acordo com (12), as seguintes expressões para o valor de x^*, que é a estimativa da dose econômica do nutriente:

a) Modelo quadrático

$$x^* = \frac{\theta - \hat{b}}{2\hat{c}} \qquad (15)$$

b) Modelo com raiz quadrada

$$\sqrt{x^*} = \frac{\hat{c}}{2(\theta-\hat{b})} \tag{16}$$

ou

$$x^* = \frac{\hat{c}^2}{4(\theta-\hat{b})^2} \tag{17}$$

c) Equação de Mitscherlich

$$X^* = qx^* = \frac{1}{\hat{c}} \log \frac{\hat{a}\hat{c}q}{\theta \log e} - \hat{b} \tag{18}$$

ou

$$x^* = \frac{1}{\ln\rho} \ln \frac{\theta}{\beta \ln\hat{\rho}} \tag{19}$$

onde log indica logaritmo decimal e ln indica logaritmo neperiano.

2.3 - Estimativas dos Parâmetros e suas Variâncias e covariâncias

Dados n pares de valores x_i, y_i $(i=1,\dots,n)$, as estimativas dos parâmetros dos modelos (1) e (2) podem ser obtidas pelo método de mínimos quadrados ordinários. Temos

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'y \tag{20}$$

onde y é o vetor coluna das produções e

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & v_1 \\ 1 & x_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & v_n \end{bmatrix}$$

com $v_i = x_i^2$ no caso do modelo (1) e $v_i = \sqrt{x_i}$ no caso do modelo (2).

A matriz de variâncias e covariâncias das estimativas $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ é

$$(X'X)^{-1}\,\sigma^2 \tag{21}$$

No caso de apenas 3 níveis equidistantes de nutrientes, com r repetições, se indicarmos estes níveis por $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, obtemos, para o modelo (1),

$$X'X = r\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}$$

e

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 13/2 & -3 \\ 1/2 & -3 & 3/2 \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

e para o modelo (2),

$$X'X = r\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1+\sqrt{2} \\ 3 & 5 & 1+2\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 1+2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & -(2+\sqrt{2})/2 \\ \sqrt{2}/2 & 5+3\sqrt{2} & -(12+9\sqrt{2})/2 \\ -(2+\sqrt{2})/2 & -(12+9\sqrt{2})/2 & 9+6\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

As estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros do modelo (4) são obtidas através de um método iterativo descrito por STEVENS (1951).Se os erros u_i forem independentes e apresentarem distribuição normal com média zero e variância σ^2, as estimativas de mínimos quadrados de α, β e ρ coincidem com as estimativas de máxima verossimilhança e são, portanto, consistentes e assintoticamente eficientes.

Partindo de uma estimativa preliminar (ρ_0) de ρ, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma\rho_0^{x_i} & \Sigma x_i\rho_0^{x_i-1} \\ \Sigma\rho_0^{x_i} & \Sigma\rho_0^{2x_i} & \Sigma x_i\rho_0^{2x_i-1} \\ \Sigma x_i\rho_0^{x_i-1} & \Sigma x_i\rho_0^{2x_i-1} & \Sigma x_i^2\rho_0^{2x_i-2} \end{bmatrix}$$

cuja inversa STEVENS (1951) indicou por

$$F = \begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} & F_{ar} \\ F_{ab} & F_{bb} & F_{br} \\ F_{ar} & F_{br} & F_{rr} \end{bmatrix} \qquad (24)$$

A seguir obtemos as estimativas (ainda não definitivas) dos três parâmetros da regressão:

$$\alpha_1 = F_{aa}\ \Sigma y_i + F_{ab}\ \Sigma y_i \rho_o^{x_i} + F_{ar}\ \Sigma x_i y_i \rho_o^{x_i - 1}$$

$$\beta_1 = F_{ab}\ \Sigma y_i + F_{bb}\ \Sigma y_i \rho_o^{x_i} + F_{br}\ \Sigma x_i y_i \rho_o^{x_i - 1}$$

$$\rho_1 = \rho_o + \Delta\rho$$

onde

$$\Delta\rho = \frac{1}{\beta_1} (F_{ar}\ \Sigma y_i + F_{br}\ \Sigma y_i \rho_o^{x_i} + F_{rr}\ \Sigma x_i y_i \rho_o^{x_i - 1})$$

Se o valor da correção $\Delta\rho$, adicionada a ρ_o, não for desprezível, repetimos o processo utilizando, agora, o valor ρ_1 como estimativa preliminar de ρ. O ciclo de cálculos será repetido até que a correção adicional($\Delta\rho$) seja considerada desprezível. Chegamos, assim, às estimativas definitivas $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$.

As estimativas das variâncias e covariâncias dessas estimativas são dadas por:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{V}(\hat{\alpha}) = F_{aa}\ s^2 & \hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = F_{ab}\ s^2 \\ \hat{V}(\hat{\beta}) = F_{bb}\ s^2 & \hat{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\rho}) = \dfrac{F_{ar}}{\hat{\beta}}\ s^2 \\ \hat{V}(\rho) = \dfrac{F_{rr}}{\hat{\beta}^2}\ s^2 & \hat{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\rho}) = \dfrac{F_{br}}{\hat{\beta}}\ s^2 \end{array}\right\} \tag{25}$$

onde

$$s^2 = \frac{\Sigma(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\hat{\rho}^{x_i})^2}{n - 3}$$

Obviamente, utilizamos os valores dos elementos da matriz F obtidos na última iteração realizada.

Obtidas as estimativas dos parâmetros do modelo (4), é fácil determinar as estimativas dos parâmetros do modelo (3). Na realidade temos aí um único modelo, uma expressão sendo simplesmente uma reparametrização da outra. Temos $\hat{a} = \hat{\alpha}$ e, de acordo com (5) e (6), obtemos

$$\hat{c} = -\frac{\ln \hat{\rho}}{q \ln 10} \tag{26}$$

e

$$\hat{b} = \frac{q \ln\left(-\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}\right)}{\ln \hat{\rho}} \qquad (27)$$

De acordo com GOMES, Pimentel (1953), temos

$$\hat{V}(\hat{c}) = \frac{\hat{V}(\hat{\rho})}{(q\,\hat{\rho}\,\ln 10)^2} \qquad (28)$$

e

$$\hat{V}(\hat{b}) = \frac{q^2}{(\ln \hat{\rho})^2}\left[\frac{\hat{V}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}^2} + \frac{\hat{V}(\hat{\alpha})}{\hat{\alpha}^2} + w^2\hat{V}(\hat{\rho}) - 2\,\frac{\hat{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta})}{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - 2\,\frac{w\hat{Cov}(\hat{\beta},\hat{\rho})}{\hat{\beta}} + 2\,\frac{w\,\hat{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\rho})}{\hat{\alpha}}\right] \qquad (29)$$

onde

$$w = \frac{\ln\left(-\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}\right)}{\hat{\rho}\ln \hat{\rho}}$$

GOMES, Pimentel (1953) apresentou, também, os valores assumidos por F_{aa}, F_{ab}, etc., para o caso particular de três níveis equidistantes de nutrientes.

2.4 - Estimativa da Variância da Dose Econômica Estimada

Sejam a e b os estimadores não tendenciosos e com distribuição normal (ou consistentes e assintoticamente normalmente distribuídos) dos parâmetros α e β. Seja g(a, b) uma função qualquer com derivadas de segunda ordem contínuas em uma região ao redor de α, β. É possível demonstrar, então, que g (a, b) é um estimador consistente de g (α, β), com distribuição assintoticamente normal com variância ([3]).

$$\left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)^2 V(a) + \left(\frac{\partial g}{\partial b}\right)^2 V(b) + 2\,\frac{\partial g}{\partial a}\,\frac{\partial g}{\partial b}\,\mathrm{Cov}\,(a,b) \qquad (30)$$

Segue-se que (15), (17) e (19) são estimadores consistentes da dose econômica de nutriente, com distribuições assintoticamente normais com variâncias:

a) Modelo quadrático

$$V(x^*) = \frac{V(\hat{b})}{4\hat{c}^2} + \frac{(\theta-\hat{b})^2 V(\hat{c})}{4\hat{c}^4} + \frac{(\theta-\hat{b})\,\mathrm{Cov}(\hat{b},\hat{c})}{2\hat{c}^3} \qquad (31)$$

([3]) Ver THEIL (1971), p. 373-375.

b) Modelo com raiz quadrada

$$V(x^*) = \frac{\hat{c}^2\phi^4}{4}\left[\hat{c}^2\phi^2\, V(\hat{b}) + V(\hat{c}) + 2\hat{c}\phi\, \mathrm{Cov}(\hat{b},\hat{c})\right] \tag{32}$$

onde

$$\phi = \frac{1}{\theta - \hat{b}}$$

c) Equação de Spillman-Mitscherlich

$$V(x^*) = \frac{V(\hat{\beta})}{(\hat{\beta}\ln\hat{\rho})^2} + \psi^2 V(\hat{\rho}) + \frac{2\psi\,\mathrm{Cov}(\hat{\beta},\hat{\rho})}{\hat{\beta}\ln\hat{\rho}} \tag{33}$$

onde

$$\psi = \frac{1+\ln\left(\frac{\theta}{\hat{\beta}\ln\hat{\rho}}\right)}{\hat{\rho}(\ln\hat{\rho})^2}$$

2.5 - O Intervalo de Confiança para a Dose Econômica, Obtido com Base no Teorema de Fieller

Vejamos, inicialmente, uma apresentação sumária do teorema de Fieller ([4]).

Sejam d_1 e d_2 os estimadores não tendenciosos de δ_1 e δ_2, respectivamente. Admitamos que as estimativas das variâncias de d_1 e d_2 e a estimativa da covariância entre d_1 e d_2, conhecidas, são:

$$\hat{V}(d_1) = v_{11}\, s^2,$$

$$\hat{V}(d_2) = v_{22}\, s^2$$

e

$$\hat{\mathrm{Cov}}\,(d_1, d_2) = v_{12}\, s^2$$

O teorema de Fieller mostra como podemos, então, obter um intervalo de confiança para o quociente

$$\mu = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Se d_1 e d_2 tem distribuição normal e se t_0 é o valor crítico de t para o nível de confiança escolhido, então o intervalo de confiança para μ é a solução da seguinte inequação em μ:

([4]) Ver FINNEY (1971), p. 27.

$$(1-g)\ \mu^2 - 2\ (m-g\ \frac{v_{12}}{v_{22}})\ \mu + m^2 - g\ \frac{v_{11}}{v_{22}} \leq 0 \tag{34}$$

onde

$$m = \frac{d_1}{d_2}$$

e

$$g = \frac{t_o^2\ s^2\ v_{22}}{d_2^2}$$

Para que a solução da inequação (34) seja um intervalo finito devemos ter

$$1 - g > 0,\ \text{isto é},\ g < 1, \tag{35}$$

o que implica em

$$\frac{[d_2]}{\sqrt{v_{22}\ s^2}} > t_o$$

Isso significa que devemos rejeitar, ao nível de significância escolhido, a hipótese H_0: $\delta_2 = 0$, em favor da hipótese H_A: $\delta_2 \neq 0$. Essa condição deve ser relacionada com o fato de que o quociente não é definido se o denominador for igual a zero.

Com $g < 1$ o intervalo de confiança procurado é delimitado pelas raízes da equação, que são

$$L_1 = \frac{1}{1-g}\ (m-g\ \frac{v_{12}}{v_{22}} - \sqrt{\Delta}) \tag{36}$$

e

$$L_2 = \frac{1}{1-g}\ (m-g\ \frac{v_{12}}{v_{22}} + \sqrt{\Delta})\ , \tag{37}$$

onde

$$\Delta = \frac{t_o^2\ s^2}{d_2^2} \left[v_{11} - 2mv_{12} + m^2 v_{22} - g\ (v_{11} - \frac{v_{12}^2}{v_{22}}) \right] \tag{38}$$

Então, com $g < 1$, o intervalo de confiança é

$$L_1 < \mu < L_2$$

Se $g > 1$ e $\Delta > 0$, o intervalo é

$$\mu < L_1 \text{ e } \mu > L_2$$

Se $g > 1$ e $\Delta < 0$, o intervalo fica

$$-\infty < \mu < \infty$$

Em qualquer caso, o intervalo contém m.

Os intervalos de confiança obtidos através do teorema de Fieller podem ser interpretados em função da região de confiança para os parâmetros δ_1 e δ_2, como mostram as figuras 1, 2 e 3. Sabemos que a região de confiança para dois parâmetros é, num sistema de eixos cartesianos ortogonais, delimitada por uma elipse. A um ponto (δ_1, δ_2) da região de confiança corresponde, no intervalo de confiança para μ, um valor $\mu = \delta_1/\delta_2$, igual à inclinação da reta que une o ponto (δ_1, δ_2) à origem do sistema de eixos. Em cada figura colocamos, abaixo do sistema de eixos cartesianos ortogonais, um eixo dos valores de μ, assinalando com uma linha dupla o intervalo de confiança para μ. Consideramos três pontos na região de confiança para δ_1 e δ_2, um deles sendo o ponto A (d_1, d_2), e utilizamos a mesma letra para indicar os pontos correspondentes no intervalo de confiança para μ. No eixo dos μ, a abcissa de A é, evidentemente, igual a m.

Na figura 1 vemos que o intervalo de confiança para μ é do tipo $L_1 < \mu < L_2$, com $L_1 > 0$, pois as retas que unem pontos da região de confiança para δ_1 e δ_2 à origem dos eixos tem sempre inclinação positiva.

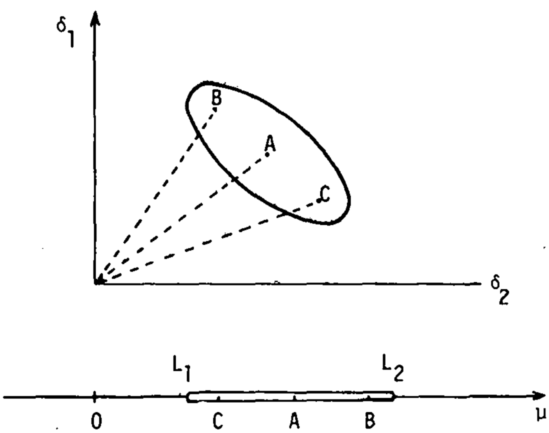

FIGURA 1. - Intervalo de Confiança do Tipo $L_1 < \mu < L_2$.

A figura 2 ilustra o caso de um intervalo de confiança de tipo $\mu < L_1$ e $\mu > L_2$. Unindo à origem dos eixos os pontos localizados na parte da região de confiança para δ_1 e δ_2 que está no 1.º quadrante, obtemos retas com inclinação $(\mu = \delta_1/\delta_2)$ positiva; para pontos muito próximos do eixo das orde

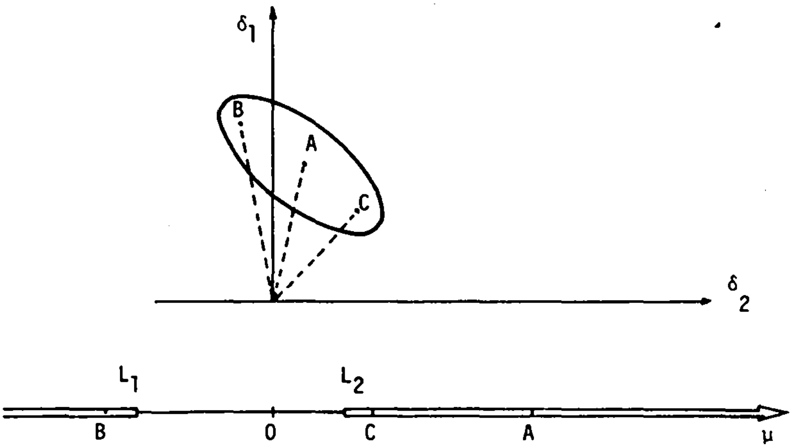

FIGURA 2. - Intervalo de Confiança do Tipo $\mu < L_1$ e $\mu > L_2$.

nadas (δ_1) correspondem retas com inclinação muito grande; a essa parte da região de confiança para δ_1 e δ_2 corresponde, portanto, o sub-intervalo $\mu > L_2$. Analogamente, podemos verificar que o sub-intervalo $\mu < L_1$ corresponde à parte da região de confiança para δ_1 e δ_2 que fica no 2.º quadrante.

A figura 3 mostra uma situação algo diferente, com o intervalo de confiança para μ contendo o ponto $\mu = 0$.

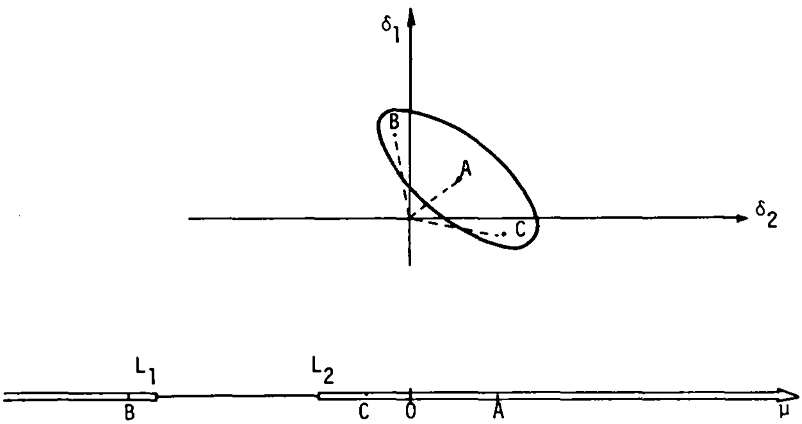

FIGURA 3. - Intervalo de Confiança para μ com o Ponto $\mu = 0$.

Na expressão (15), a estimativa da dose econômica aparece como o resultado da divisão entre duas variáveis aleatórias. Fazendo

$$d_1 = \theta - \bar{b}$$

e

$$d_2 = 2\hat{c}$$

podemos utilizar (36) e (37) para determinar o intervalo de confiança da dose econômica.

No caso do modelo com raiz quadrada determinamos, inicialmente, o intervalo de confiança para a raiz quadrada da dose econômica. De acordo com (16), fazemos

$$d_1 = \hat{c}$$

e

$$d_2 = 2(\theta - \hat{b})$$

Obtidos os limites do intervalo de confiança para a raiz quadrada da dose econômica, e desde que nenhum seja negativo, tomamos os seus quadrados como limites do intervalo de confiança para a dose econômica.

De (19), obtemos, para a dose econômica baseada na equação de Mitscherlich,

$$x^* = \frac{d_1}{d_2}$$

onde

$$d_1 = \ln \theta - \ln(-\hat{\beta}) - \ln(-\ln \hat{\rho})$$

e

$$d_2 = \ln \hat{\rho}$$

Neste caso a aplicação do teorema de Fieller é apenas aproximada já que tanto no numerador como no denominador temos estimadores consistentes, mas tendenciosos, e são conhecidas apenas as variâncias das distribuições assintóticas. De acordo com (30), obtemos

$$\hat{V}(d_1) = \frac{\hat{V}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}^2} + \frac{\hat{V}(\hat{\rho})}{(\hat{\rho}\ln \hat{\rho})^2} + \frac{2\ \hat{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\rho})}{\hat{\beta}\,\hat{\rho}\ln \hat{\rho}}$$

e

$$\hat{V}(d_2) = \frac{\hat{V}(\hat{\rho})}{\hat{\rho}^2}$$

Temos, também, que

$$\hat{Cov}(d_1, d_2) = -\frac{\hat{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\rho})}{\hat{\beta}\,\hat{\rho}} - \frac{\hat{V}(\hat{\rho})}{\hat{\rho}^2 \ln \hat{\rho}}$$

Ao determinar o intervalo de confiança para a dose econômica com base em (15), (16) ou (19), estamos levando em consideração apenas a condição necessária, ou condição de 1.ª ordem, para receita líquida máxima. Mesmo que x^* satisfaça as condições suficientes para ótimo econômico, pode ser que partes do intervalo de confiança obtido não sejam aceitáveis como solução do problema de maximização da receita líquida.

Consideremos, por exemplo, o modelo quadrático. Seja χ a dose econômica estimada por x^*. Admitimos que x^* é um ponto do estágio racional da função de produção e que foi obtido um intervalo de confiança do tipo $\chi < L_1$ e $\chi > L_2$, com x^* pertencendo ao sub-intervalo $\chi < L_1$. Então o sub-intervalo $\chi < L_1$ corresponde a valores negativos do parâmetro c, que é a condição de 2.ª ordem para receita líquida máxima e o sub-intervalo $\chi > L_2$ corresponde a valores positivos do parâmetro c, ou seja, são pontos que não satisfazem a condição suficiente para maximização da receita líquida. Portanto, neste caso, só nos interessa o sub-intervalo $\chi < L_1$. Em geral, pode-se verificar que, quando o intervalo de confiança é composto de dois sub-intervalos ($\chi < L_1$ e $\chi > L_2$), só nos interessa o sub-intervalo que contém o ponto de abcissa x^*, que satisfaz as condições suficientes.

3 - ANÁLISE DOS DADOS DE UM GRUPO DE 50 ENSAIOS FATORIAIS 3^3

Nos anos agrícolas de 1957-58, 1958-59, 1959-60, 1960-61 foram instalados pelo Dr. Hermano Vaz de Arruda, Chefe da Seção de Estatística do Instituto Biológico de São Paulo, ensaios fatoriais 3^3 de adubação NPK em milho, na região de Ribeirão Preto (SP), em terra roxa legítima.

As doses utilizadas foram zero, 40 e 80 kg/ha para os três nutrientes.

O nitrogênio foi aplicado na forma de sulfato de amônio em cobertura apenas. O fósforo foi aplicado na forma de superfosfato simples e o potássio na forma de cloreto de potássio. Estes foram colocados nos sulcos,por ocasião do plantio.

Os ensaios tinham apenas uma repetição, com 27 parcelas dadas pelas combinações dos diferentes nutrientes nos diferentes níveis e o delineamento utilizado foi o de blocos casualizados.

Foi feito o confundimento de dois graus de liberdade da interação tripla NxPxK nos quatro modos designados por Yates como W, X, Y e Z.

Do total de ensaios instalados, foram selecionados 50 por CAMPOS (1967) para o estudo das doses economicamente aconselháveis de nutrientes através do ajustamento de regressão polinomial quadrática. A análise econométrica desses 50 ensaios através de outros modelos pode ser encontrada em VIEIRA (1970) e VIEIRA "et alii" (1971).

Aqui discutiremos a determinação do intervalo de confiança da do se econômica considerando cinco diferentes conjuntos de ensaios:

1) Geral (Grupo dos 50 ensaios);

2) Grupo dos 13 ensaios conduzidos no ano agrícola de 1957-58;

3) Grupo dos 14 ensaios conduzidos no ano agrícola de 1958-59;

4) Grupo dos 11 ensaios conduzidos no ano agrícola de 1959-60;

5) Grupo dos 12 ensaios conduzidos no ano agrícola de 1960-61.

No quadro 1 apresentamos as produções médias, em quilogramas de milho por hectare, dos grupos de ensaios considerados. É dado, também, o valor do desvio-padrão residual obtido por CAMPOS (1967), através das análises de variância conjuntas, feitas pelos métodos usuais.

Note que ao analisarmos separadamente o efeito de cada nutriente o número de repetições (r) de cada tratamento é igual a 9 vezes o número de ensaios do grupo, pois em um ensaio fatorial 3^3 cada nível de N,por exemplo, é repetido 9 vezes.

QUADRO 1. - Produções Médias dos Grupos de Ensaios de Adubação NPK em Milho, Instalados na Região de Ribeirão Preto, SP, e Valor do Desvio-Padrão Residual (s),Obtido das Análises de Variância Conjuntas

(kg/ha)

Tratamento (NPK)	Grupo de ensaio				
	Geral	Ano agrícola 1957-58	Ano agrícola 1958-59	Ano agrícola 1959-60	Ano agrícola 1960-61
000	3671	2865	3283	4341	4383
001	3846	3308	3256	4809	4233
002	4018	3406	3390	5059	4458
010	4118	3710	3512	4482	4933
011	4297	3812	3454	4932	5225
012	4076	3402	3500	5218	4433
020	3990	3645	3368	4859	4292
021	4128	3410	3614	4909	4788
022	4366	3537	3818	5250	5096
100	4733	4033	4378	5473	5225
101	4868	3895	4335	5704	5775
102	4809	3820	4337	6018	5321
110	4792	4035	4804	5209	5217
111	4966	4130	4627	6023	5300
112	4955	4097	4419	5986	5562
120	5108	4600	4490	5777	5767
121	5236	4676	4859	6059	5529
122	5094	4121	4728	6257	5508
200	5155	4404	4428	6304	5762
201	5216	4508	4875	5777	5867
202	5282	3918	4949	6377	6146
210	5201	4389	4930	6091	5583
211	5504	4172	5130	6639	6346
212	5500	4708	4926	6609	6008
220	5479	4690	5318	5809	6221
221	5587	4498	5194	6568	6325
222	5583	4882	5359	6286	5958
s	656,25	654,45	539,43	684,78	749,04

Nos quadros 2, 3 e 4 são dadas as estimativas dos parâmetros e dos respectivos desvios-padrões para cada nutriente, para cada um dos 5 grupos de ensaios e para cada um dos três modelos considerados.

QUADRO 2. - Estimativas dos Parâmetros e dos Respectivos Desvios-Padrões, para os Três Nutrientes, Relativos ao Modelo Quadrático ($y_i = a + bx_i + cx_i^2 + u_i$)

Grupo de ensaio	$\hat{a}$	$s(\hat{a})$	$\hat{b}$	$s(\hat{b})$	$\hat{c}$	$s(\hat{c})$
			Nitrogênio (N)			
Geral	4056,7	30,9	1122,6	78,9	-228,1	37,9
Ano agrícola 1957-58	3455,0	60,5	898,6	154,3	-197,2	74,1
Ano agrícola 1958-59	3466,1	48,1	1400,8	122,5	-313,9	58,9
Ano agrícola 1959-60	4873,2	68,8	1221,5	175,5	-260,7	84,3
Ano agrícola 1960-61	4649,0	72,1	948,7	183,8	-130,6	88,3
			Fósforo (P_2O_5)			
Geral	4622,0	30,9	237,3	78,9	- 36,1	37,9
Ano agrícola 1957-58	3795,2	60,5	293,9	154,3	- 38,6	74,1
Ano agrícola 1958-59	4136,8	48,1	264,8	122,5	- 34,7	58,9
Ano agrícola 1959-60	5540,2	68,8	188,7	175,5	- 41,2	84,3
Ano agrícola 1960-61	5241,1	72,1	190,8	183,8	- 31,1	88,3
			Potássio (K_2O)			
Geral	4694,1	30,9	231,6	78,9	- 75,9	37,9
Ano agrícola 1957-58	4041,2	60,5	35,1	154,3	- 30,9	74,1
Ano agrícola 1958-59	4279,0	48,1	134,3	122,5	- 41,7	58,9
Ano agrícola 1959-60	5371,7	68,8	421,4	175,5	- 79,7	84,3
Ano agrícola 1960-61	5264,8	72,1	384,1	183,8	-161,3	88,3

QUADRO 3. - Estimativas dos Parâmetros e dos Respectivos Desvios-Padrões para os Três Nutrientes, Relativos ao Modelo com Raiz Quadrada ($y_i = a + bx_i + c\sqrt{x_i} + u_i$)

Grupo de ensaio	$\hat{a}$	$s(\hat{a})$	$\hat{b}$	$s(\hat{b})$	$\hat{c}$	$s(\hat{c})$
Nitrogênio (N)						
Geral	4056,7	30,9	115,9	94,1	778,6	129,4
Ano agrícola 1957-58	3455,0	60,5	28,0	183,9	673,4	253,0
Ano agrícola 1958-59	3466,1	48,1	15,2	146,1	1071,7	200,9
Ano agrícola 1959-60	4873,2	68,8	70,6	209,2	890,2	287,8
Ano agrícola 1960-61	4649,0	72,1	372,2	219,1	445,9	301,4
Fósforo (P_2O_5)						
Geral	4622,0	30,9	78,1	94,1	123,1	129,4
Ano agrícola 1957-58	3795,2	60,5	123,7	183,9	131,6	253,0
Ano agrícola 1958-59	4136,8	48,1	111,6	146,1	118,5	200,9
Ano agrícola 1959-60	5540,2	68,8	6,7	209,2	140,7	287,8
Ano agrícola 1960-61	5241,1	72,1	53,4	219,1	106,2	301,4
Potássio (K_2O)						
Geral	4694,1	30,9	-103,4	94,1	259,1	129,4
Ano agrícola 1957-58	4041,2	60,5	-101,2	183,9	105,5	253,0
Ano agrícola 1958-59	4279,0	48,1	- 49,9	146,1	142,4	200,9
Ano agrícola 1959-60	5371,7	68,8	69,5	209,2	272,2	287,8
Ano agrícola 1960-61	5264,8	72,1	-327,9	219,1	550,6	301,4

QUADRO 4. - Estimativas dos Parâmetros e dos Respectivos Desvios-Padrões, para os Três Nutrientes, Relativos à Equação de Mitscherlich, $y_i = a\left[1-10^{-c(X_i+b)}\right] + u_i$

Grupo de ensaio	$\hat{a}$	$s(\hat{a})$	$\hat{b}$	$s(\hat{b})$	$\hat{c}.10^5$	$s(\hat{c}).10^5$
	Nitrogênio (N)					
Geral	5811,1	169,1	67,2	9,1	774	143
Ano agrícola 1957-58	4702,0	256,8	64,2	21,4	897	386
Ano agrícola 1958-59	5347,9	190,3	48,5	8,1	936	203
Ano agrícola 1959-60	6643,5	320,4	67,6	18,9	850	311
Ano agrícola 1960-61	7211,2	1238,3	107,6	44,1	418	291
	Fósforo (P_2O_5)					
Geral	5183,5	404,2	200,4	163,8	482	527
Ano agrícola 1957-58	4640,7	1184,1	189,4	250,6	390	771
Ano agrícola 1958-59	4899,3	942,1	207,1	248,0	390	679
Ano agrícola 1959-60	5803,9	296,6	151,0	306,1	889	2079
Ano agrícola 1960-61	5650,8	769,5	212,6	499,8	536	1599
	Potássio (K_2O)					
Geral	4853,8	32,6	37,0	112,8	4006	12370
Ano agrícola 1957-58	(a)					
Ano agrícola 1958-59	4381,7	60,3	64,8	212,2	2517	8525
Ano agrícola 1959-60	6103,8	470,7	134,9	121,4	683	782
Ano agrícola 1960-61	(a)					

Nota: (a) A equação de Mitscherlich não se ajusta porque há diminuição da produção média quando se passa de uma para duas doses do nutriente.

Nos quadros de 5 a 13 são dadas as estimativas da dose econômica de cada nutriente e da produção correspondente, para várias relações de preço, para os 5 grupos de ensaios e para cada um dos três modelos considerados. São dados, também dois intervalos de 90% de confiança para a dose econômica: um baseado na estimativa da variância assintótica, dada pelas expressões(31), (32) ou (33), e outro obtido de acordo com o teorema de Fieller.

Há casos em que os dois intervalos de confiança são bastante concordantes, como ocorre para a dose econômica de nitrogênio, baseada nos 50 ensaios (quadros 5, 8 e 11).

Quando há discrepância entre os dois intervalos de confiança, acreditamos que deva ser adotado o intervalo de confiança baseado no teorema de Fieller. Uma de suas vantagens é refletir, corretamente, a indeterminação de um quociente quando o denominador da fração não é estatisticamente diferente de zero.

É sempre bom lembrar que as expressões (31), (32) e (33) são variâncias assintóticas, isto é, elas dão a variância da distribuição de x^* no limite, quando o tamanho (n) da amostra tende ao infinito. Para uma amostra suficientemente grande, elas dão uma boa aproximação da variância de x^*, mas nunca sabemos qual deve ser o valor de n para que a amostra possa ser considerada "suficientemente grande" ([5]).

Uma característica interessante do intervalo de confiança (ou do sub-intervalo que interessa do ponto de vista econômico) determinado pelo teorema de Fieller, é que seu limite inferior nunca cresce quando aumenta a relação de preços (θ). Sabemos que, quando o valor de θ cresce, ou porque aumenta o preço do nutriente, ou porque diminui o preço do produto, a dose econômica sempre diminui, devido à lei dos rendimentos marginais decrescentes. No entanto, há casos em que o limite inferior do intervalo de confiança, baseado na variância assintótica cresce quando aumenta a relação de preços(θ). Vejamos, por exemplo, a determinação da dose econômica de K_2O com base nos 11 ensaios conduzidos no ano agrícola de 1959-60, considerando o modelo quadrático (ver quadro 7). Quando o valor de θ passa de 2 para 5, a estimativa da dose econômica cai de 86 para 56. O intervalo de confiança baseado no teorema de Fieller mostra que, enquanto com uma relação de preços $\theta = 5$ não é possível, ao nível de confiança de 90%, fazer qualquer recomendação, com o valor de θ diminuindo para 4, 3 e 2, passaríamos a recomendar a aplicação de doses superiores a 44, 49 e 54 kg/ha, respectivamente. Entretanto, no caso do intervalo de confiança baseado na variância assintótica, o limite inferior aumenta à medida que aumenta a relação de preços.

([5]) Tais considerações parecem não ser devidamente avaliadas por D'AULÍSIO (1976) que, numa situação análoga, considera mais satisfatório o intervalo de confiança baseado na variância da distribuição assintótica.

QUADRO 5. - Estimativa da Dose Econômica de Nitrogênio(N), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando o Modelo Quadrático

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X^*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica: Com base na variância assintótica		Com base no teorema de Fieller	
Geral (50 ensaios)						
8	70	5326	61	79	63	82
10	63	5263	56	71	58	73
12	56	5186	51	62	52	64
14	49	5094	45	53	46	54
16	42	4989	39	46	39	46
18	35	4870	32	39	31	38
Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)						
8	59	4349	45	72	49	91
10	51	4276	41	60	43	71
12	42	4186	35	50	35	53
14	34	4081	26	42	20	42
16	26	3959	15	37	1	34
18	18	3821	3	33	-20	28
Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)						
8	69	4947	59	78	61	83
10	64	4901	56	72	57	75
12	59	4845	52	65	53	68
14	54	4779	48	59	49	61
16	48	4703	44	53	45	54
18	43	4616	40	47	40	48
Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)						
8	69	6206	52	86	58	104
10	63	6151	49	77	54	91
12	57	6083	46	68	49	78
14	51	6003	42	59	44	66
16	45	5911	38	51	38	55
18	38	5807	32	45	30	45
Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)						
8	96	6176	32	160	65	∞ (a)
10	84	6066	33	135	59	∞ (a)
12	72	5931	34	110	53	∞ (a)
14	60	5772	34	85	45	∞ (a)
16	47	5588	32	63	31	∞ (a)
18	35	5380	21	49	- ∞	∞ (b)

Notas: (a) $g > 1$; o intervalo de confiança tem um outro componente, constituído por valores menores do que k.

(b) $g > 1$ e discriminante negativo.

QUADRO 6. - Estimativa da Dose Econômica de Fósforo (P_2O_5), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando o Modelo Quadrático

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X^*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica			
			Com base na variância assintótica		Com base no teorema de Fieller	
Geral (50 ensaios)						
6	-2	(b)	-76	73	- ∞	28 (a)
8	-46	(b)	-196	104	- ∞	10 (a)
10	-90	(b)	-317	136	- ∞	-7 (a)
12	-135	(b)	-438	168	- ∞	-23 (a)
Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)						
6	28	3982	-25	81	- ∞	∞
8	-14	(b)	-188	160	- ∞	32 (a)
10	-55	(b)	-359	249	- ∞	20 (a)
12	-97	(b)	-532	339	- ∞	9 (a)
Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)						
6	14	4227	-65	93	- ∞	∞
8	-32	(b)	-235	172	- ∞	24 (a)
10	-78	(b)	-410	254	- ∞	11 (a)
12	-124	(b)	-584	336	- ∞	-2 (a)
Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)						
6	-25	(b)	-248	198	- ∞	29 (a)
8	-64	(b)	-417	289	- ∞	19 (a)
10	-103	(b)	-586	381	- ∞	9 (a)
12	-141	(b)	-756	473	- ∞	0 (a)
Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)						
6	-32	(b)	-372	309	- ∞	33 (a)
8	-83	(b)	-663	497	- ∞	21 (a)
10	-135	(b)	-955	686	- ∞	11 (a)
12	-186	(b)	-1247	875	- ∞	2 (a)

Notas: (a) $g > 1$; há outro componente do intervalo de confiança.
(b) extrapolação sem sentido agronômico.

QUADRO 7. - Estimativa da Dose Econômica de Potássio (K_2O), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando o Modelo Quadrático

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X^*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica: Com base na variância assintótica		Com base no teorema de Fieller	
		Geral (50 ensaios)				
2	40	4850	30	49	23	57
3	29	4823	17	42	-24	39
4	19	4786	-1	39	-81	31
5	8	4739	-19	36	-140	24
		Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)				
2	-29	(b)	-307	249	- ∞	30 (a)
3	-55	(b)	-434	324	- ∞	24 (a)
4	-81	(b)	-562	401	- ∞	18 (a)
5	-107	(b)	-690	477	- ∞	12 (a)
		Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)				
2	26	4349	-16	68	- ∞	∞
3	7	4301	-75	89	- ∞	36 (a)
4	-12	(b)	-137	113	- ∞	27 (a)
5	-32	(b)	-200	137	- ∞	21 (a)
		Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)				
2	86	5908	3	168	54	∞ (a)
3	76	5883	10	141	49	∞ (a)
4	66	5848	16	115	44	∞ (a)
5	56	5803	22	89	- ∞	∞
		Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)				
2	38	5483	27	48	0	54
3	33	5471	20	45	-44	44
4	28	5454	13	43	-93	38
5	23	5431	4	42	-144	34

Notas: (a) $g > 1$; há outro componente do intervalo de confiança.
(b) extrapolação sem sentido agronômico.

QUADRO 8. - Estimativa da Dose Econômica de Nitrogênio (N), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando o Modelo com Raiz Quadrada

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica: Com base na variância assintótica		Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica: Com base no teorema de Fieller	
Geral (50 ensaios)						
8	146	5964	1	290	75	1354
10	75	5341	32	118	50	197
12	46	5022	30	61	35	76
14	31	4828	24	37	26	41
16	22	4699	19	25	19	26
18	17	4607	14	19	14	19
Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)						
8	53	4269	4	102	31	∞ (a)
10	33	4087	16	50	23	161
12	22	3972	15	29	16	38
14	16	3892	11	21	10	21
16	12	3834	8	16	6	16
18	9	3789	5	14	4	13
Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)						
8	124	5397	1	246	64	1399
10	78	4988	26	129	49	275
12	53	4722	29	78	38	114
14	39	4535	26	51	30	63
16	29	4396	23	36	24	40
18	23	4290	19	27	20	28
Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)						
8	127	6687	-96	351	50	∞ (a)
10	73	6205	-7	153	39	∞ (a)
12	47	5924	14	80	30	463
14	33	5741	18	48	24	93
16	24	5612	17	32	19	41
18	19	5517	14	23	14	25
Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)						
8	∞					
10	2569	(b)	-58762	63900	55	∞ (a)
12	171	7163	-612	954	37	∞ (a)
14	56	5703	-43	156	25	∞ (a)
16	28	5278	7	48	14	∞ (a)
18	16	5088	8	25	(c)	∞

Notas: (a) g > 1; há outro componente do intervalo de confiança.
(b) extrapolação sem sentido agronômico.
(c) raiz quadrada negativa.

QUADRO 9. - Estimativa da Dose Econômica de Fósforo (P_2O_5), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando o Modelo com Raiz Quadrada

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X^*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica			
			Com base na variância assintótica		Com base no teorema de Fieller	
Geral (50 ensaios)						
6	6	4680	- 4	15	(b)	13
8	3	4658	- 3	8	(b)	8
10	1	4648	- 2	5	(b)	5
12	1	4643	- 2	3	(b)	4
Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)						
6	13	3909	-10	35	(b)	∞
8	4	3853	-11	20	(b)	15 (a)
10	2	3834	- 7	12	(b)	10 (a)
12	1	3824	- 5	8	(b)	7
Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)						
6	9	4215	-10	27	(b)	∞
8	3	4180	- 8	14	(b)	11 (a)
10	2	4166	- 5	8	(b)	8
12	1	4159	- 3	6	(b)	6
Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)						
6	4	5583	-11	18	(b)	13 (a)
8	2	5572	- 7	11	(b)	10 (a)
10	1	5566	- 5	8	(b)	7
12	1	5561	- 4	6	(b)	6
Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)						
6	3	5276	-15	22	(b)	15 (a)
8	2	5264	- 9	12	(b)	10 (a)
10	1	5259	- 6	8	(b)	8 (a)
12	1	5255	- 4	5	(b)	6

Notas: (a) $g > 1$; há outro componente do intervalo de confiança.
(b) raiz quadrada negativa.

QUADRO 10. - Estimativa da Dose Econômica de Potássio (K_2O), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando o Modelo com Raiz Quadrada

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X^*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica: Com base na variância assintótica		Com base no teorema de Fieller	
		Geral (50 ensaios)				
2	20	4826	12	28	11	46
3	13	4810	8	19	4	19
4	10	4797	4	15	2	14
5	7	4786	2	12	1	11
		Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)				
2	3	4063	-13	19	(c)	14 (a)
3	2	4061	-10	14	(c)	11 (a)
4	2	4058	- 8	11	(c)	9 (a)
5	1	4057	- 6	9	(c)	8 (a)
		Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)				
2	12	4342	- 4	28	(c)	∞
3	7	4330	- 7	21	(c)	17 (a)
4	5	4322	- 7	16	(c)	13 (a)
5	3	4316	- 6	12	(c)	10
		Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)				
2	6692	(b)	-4.10^5	4.10^5	40	∞ (a)
3	290	6609	-2709	3289	31	∞ (a)
4	90	5938	-300	481	24	∞ (a)
5	43	5731	-46	133	(c)	∞
		Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)				
2	18	5487	11	26	6	41
3	15	5479	8	22	3	23
4	13	5471	6	19	1	19
5	11	5463	5	17	1	16

Notas: (a) $g > 1$; há outro componente do intervalo de confiança.
(b) extrapolação sem sentido agronômico.
(c) raiz quadrada negativa.

QUADRO 11. - Estimativa da Dose Econômica de Nitrogênio (N), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando a Equação de Mitscherlich

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica			
			Com base na variância assintótica		Com base no teorema de Fieller	
		Geral (50 ensaios)				
8	76	5362	62	91	65	98
10	64	5250	53	75	55	80
12	54	5138	46	62	47	65
14	45	5026	39	51	40	53
16	38	4914	34	42	34	43
18	31	4801	28	34	28	34
		Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)				
8	57	4315	35	78	43	130
10	46	4218	31	61	37	93
12	37	4121	27	47	30	64
14	30	4024	23	36	22	42
16	23	3928	16	30	7	30
18	17	3831	8	27	-10	24
		Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)				
8	75	4977	58	93	62	103
10	65	4884	51	79	55	87
12	57	4791	45	68	48	74
14	49	4698	41	58	43	63
16	43	4605	36	50	38	53
18	38	4512	33	43	34	45
		Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)				
8	75	6235	46	104	57	147
10	63	6132	41	86	49	119
12	54	6030	37	71	43	95
14	46	5928	34	59	38	76
16	39	5826	30	49	33	59
18	33	5723	27	40	28	46
		Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)				
8	117	6379	20	214	72	∞ (a)
10	94	6171	23	164	60	∞ (a)
12	75	5963	26	124	51	∞ (a)
14	59	5755	27	90	43	∞ (a)
16	45	5547	27	63	32	∞ (a)
18	33	5339	20	45	- ∞	∞

Nota: (a) g > 1; há outro componente do intervalo de confiança.

QUADRO 12. - Estimativa da Dose Econômica de Fósforo (P_2O_5), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando a Equação de Mitscherlich

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X^*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica: Com base na variância assintótica		Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica: Com base no teorema de Fieller	
Geral (50 ensaios)						
6	3	4643	- 53	60	- ∞	26 (a)
8	-23	(b)	-124	79	- ∞	15 (a)
10	-43	(b)	-180	95	- ∞	7 (a)
12	-59	(b)	-226	108	- ∞	1 (a)
Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)						
6	26	3973	- 18	70	- ∞	∞
8	- 6	(b)	-141	129	- ∞	31 (a)
10	-31	(b)	-245	183	- ∞	22 (a)
12	-51	(b)	-330	229	- ∞	17 (a)
Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)						
6	15	4231	- 50	79	- ∞	∞
8	-17	(b)	-169	134	- ∞	25 (a)
10	-42	(b)	-264	180	- ∞	17 (a)
12	-62	(b)	-342	217	- ∞	11 (a)
Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)						
6	- 5	(b)	-136	126	- ∞	∞
8	-19	(b)	-203	165	- ∞	22 (a)
10	-30	(b)	-256	195	- ∞	19 (a)
12	-39	(b)	-298	220	- ∞	17 (a)
Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)						
6	-14	(b)	-246	218	- ∞	∞
8	-37	(b)	-382	308	- ∞	25
10	-55	(b)	-489	378	- ∞	21
12	-70	(b)	-576	436	- ∞	18

Notas: (a) g > 1; há outro componente do intervalo de confiança.

(b) extrapolação sem sentido agronômico.

QUADRO 13. - Estimativa da Dose Econômica de Potássio (K_2O), Respectivo Intervalo de Confiança e Estimativa da Produção Ótima, para Várias Relações de Preço (θ), com Base nos Grupos de Ensaios, Considerando a Equação de Mitscherlich

Relação de preços (θ)	Dose econômica (X*), em kg/ha	Estimativa da produção ótima, em kg/ha	Intervalo de 90% de confiança para a dose econômica			
			Com base na variância assintótica		Com base no teorema de Fieller	
Geral (50 ensaios)						
2	22	4832	-36	79	12	∞ (a)
3	17	4821	-18	53	11	∞ (a)
4	14	4810	- 6	34	- ∞	∞
5	12	4800	3	20	- ∞	∞
Ano agrícola 1957-58 (13 ensaios)						
A função não se ajusta						
Ano agrícola 1958-59 (14 ensaios)						
2	19	4347	- 9	46	- ∞	∞
3	12	4330	-13	37	- ∞	∞
4	7	4313	-42	56	- ∞	∞
5	3	4295	-66	72	- ∞	∞
Ano agrícola 1959-60 (11 ensaios)						
2	111	5977	-44	267	57	∞ (a)
3	86	5913	-21	192	47	∞ (a)
4	67	5849	- 6	140	40	∞ (a)
5	53	5786	5	101	33	∞ (a)
Ano agrícola 1960-61 (12 ensaios)						
A função não se ajusta						

Nota: (a) g > 1; há outro componente do intervalo de confiança.

Ao comparar os resultados obtidos através do modelo com raiz quadrada com os demais, verificamos que ele conduz, com freqüência, a doses econômicas muito elevadas. Isso se deve ao fato de que, para esse modelo matemático, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{dy}{dx} = b \text{ ,}$$

ou seja, a produtividade marginal nunca cai abaixo de b. Se b > 0, a função cresce sempre. Se obtivermos $\hat{b} \geqslant \theta$, a dose econômica é infinita, como ocorreu no caso da estimativa da dose econômica de nitrogênio baseada no grupo de ensaios do ano agrícola de 1960-61, quando $\theta = 8$ (ver quadro 8). É evidente que essa é uma extrapolação absurda. Quando o valor de x^* é maior do que a maior dosagem de nutriente utilizada no experimento que está sendo analisado (80 kg/ha, neste caso), devemos recomendar essa dosagem máxima. Um outro experimento teria de ser realizado para verificar até que ponto devemos aumentar a quantidade de nutriente aplicada.

Uma outra característica estranha do modelo matemático com raiz quadrada (com c > 0) é que

$$\lim_{x \to 0} \frac{dy}{dx} = \infty$$

isto é, a produtividade marginal é infinita quando x = 0. Essa característica está associada ao fato da estimativa da dose econômica de N, com base no grupo de 50 ensaios, para $\theta = 18$, ser de apenas 17 kg/ha (com intervalo de 90% de confiança, baseado no teorema de Fieller, de 14 a 19 kg/ha), enquanto o modelo quadrático leva a $x^* = 35$ (intervalo de 31 a 38) e a equação de Mitscherlich leva a $x^* = 31$ (intervalo de 28 a 34) (ver quadros 5, 8 e 11).

4 - CONCLUSÕES

a) A aplicação do teorema de Fieller é o método mais apropriado de determinar o intervalo de confiança para a dose econômica de um nutriente com base em dados experimentais, quando não consideramos as interações entre nutrientes; e

b) É confirmado que a determinação de doses economicamente aconselháveis de nutrientes só pode ser feita para grupos de ensaios de boa precisão (CAMPOS, 1967, p. 48 e VIEIRA "et alii", 1971, p. 32). Caso contrário, o intervalo de confiança para a dose econômica é tão amplo que deixa de ter significado prático.

LITERATURA

1. ARRUDA, H.V. 1959. "Contribuição para o Estudo da Adubação Mineral do Milho nas Terras Roxas do Município de Ribeirão Preto". Piracicaba,ESALQ-USP (Tese de Doutoramento).

2. CAMPOS, H. de. 1967. "Aspectos de Aplicação das Superfícies de Resposta a Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação". Piracicaba, ESALQ-USP (Tese de Livre-docência).

3. D'AULÍSIO, M.B.G. 1976. "A Variância dos Pontos de Máximo ou de Mínimo de Equações de Regressão de Segundo Grau". Piracicaba, ESALQ-USP (Dissertação de mestrado em Experimentação e Estatística).

4. FINNEY, D.J. 1971. "Statistical Method in Biological Assay". London, Griffin.

5. HEADY, E.O., J.T. PESEK, W.G. BROWN e J.P. DOLL. 1961. "Crop Response Surfaces and Economic Optima in Fertilizer Use". In HEADY, E.O. e J.L. DILLON. "Agricultural Production Functions" (Cap. 14). Ames, Iowa, Iowa State University Press.

6. VIEIRA, S. 1970. "Aspectos das Funções de Produção Ajustadas aos Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação". Piracicaba, ESALQ-USP (Tese de Doutoramento).

7. VIEIRA, S. e H. de CAMPOS. 1971. "Fórmulas para a determinação das variâncias das estimativas dos rendimentos das culturas e das doses econômicas de nutrientes, para a Lei de Mitscherlich". "Ciência e Cultura", 23(5): 657-660.

8. VIEIRA, S., H.V. de ARRUDA e R. HOFFMANN. 1971. "Estudo Comparativo de três Funções na Análise Econométrica de Experimentos de Adubação". Piracicaba, ESALQ-USP, Departamento de Ciências Sociais Aplicadas.