

# MODIFICAÇÃO NAS FUNÇÕES DE PRODUÇÃO von LIEBIG<sup>1</sup>

CARLOS LEOMAR KREUZ<sup>2</sup>, EDGAR AGUSTO LANZER<sup>3</sup>, e QUIRINO PARIS<sup>4</sup>

RESUMO - Os modelos von Liebig têm sido criticados por não considerarem a possibilidade de interações (Nelson et al. 1985). Esta crítica não é totalmente válida porque pesquisadores mostraram que os modelos von Liebig consideram interações (Lanzer 1977, Grimm 1986). O que ocorre é que as funções de produção agrícola consideram o que se pode chamar de interações de primeira ordem. Contudo, podem ser encontradas evidências na literatura da existência de interações de segunda ordem (Terman et al. 1972, Paris & Paris 1985). Utilizando a lei das relações fisiológicas formulada por Eilhard von Mitscherlich no início do século, bem como uma nova interpretação da lei proposta por Steenbjerg & Jakobsen (1966), o presente trabalho estende os modelos von Liebig para contemplar efeitos de interação de segunda ordem. A importância deste ponto é que uma função de produção mais realística, em concordância com o comportamento da natureza, possibilita uma melhor interpretação de resultados experimentais.

Termos para indexação: análise de experimentos agrícolas, interações, testes de hipóteses.

## MODIFIED VON PRODUCTION FUNCTIONS

ABSTRACT - Von Liebig models have been criticized for not considering interaction (Nelson et al. 1985). This critic is not entirely valid because researches have shown that von Liebig allow interactions (Lanzer 1977, Grimm 1986). The point is that crop response models, as polynomial production functions or traditional von Liebig models allow "first-order interactions". However, evidences are encountered in the literature that other levels of interaction effect (second-order) exist (Terman et al. 1972, Paris & Paris 1985). Using the law of physiological relations stated by another German scientist Eilhard von Mitscherlich at the beginning of this century, as well as a new interpretation given to this law more recently (Steenbjerg & Jakobsern, 1966), von Liebig models are extended to account for second-order interaction effects. The importance of the issue is that realistic crop response model, with biological meaning, is going to allow a better interpretation of experimental results.

Index terms: analysis of experimental data, interactions, hypothesis tests.

---

<sup>1</sup> Recebido em 19.11.93.

Aceito para publicação em 27.01.94.

Este trabalho é parte da Tese de Doutorado do primeiro autor no curso de Engenharia de Produção na Universidade Federal de Santa Catarina.

<sup>2</sup> Eng.-Agr., Dr., Pesquisador do EPAGRI-SC. (C Postal 596, CEP 89500, Caçador SC), Professor da UnC-Caçador/SC., Bolsista da ACADEMIA DE PESQUISA (CNPq).

<sup>3</sup> Eng.-Agr., Ph.D., Prof. da UFSC/EPSC-SC. (C. Postal 476, CEP 88049, Florianópolis, SC.), Pesquisador do CNPq.

<sup>4</sup> Eng.-Agr., Ph.D., Professor da UCD/DAE-Davis/California/EUA.

## INTRODUÇÃO

O uso eficiente de insumos na agricultura é essencial para maximizar lucros e reduzir os danos à natureza. O dano à natureza é comum quando, por exemplo, são usados fertilizantes em quantidades excessivas. Por vezes esta ação se reflete em produções decrescentes. Além disso, cada nova variedade desenvolvida nos centros de pesquisa necessita estudos de resposta a fertilizantes, bem como experimentos de espaçamento (Carlone & Russel 1987, Jolliff & Seddigh 1991). Os estudos da resposta se fazem necessários antes de uma nova cultura ou variedade ser recomendada aos produtores rurais. Isto para que se conheçam os níveis de insumo que conduzem a uma resposta adequada por parte da nova atividade rural.

O procedimento normalmente utilizado nas unidades de pesquisa agrícola é o ajuste de uma função de resposta, chamada de função de produção, aos dados coletados experimentalmente. De posse do modelo matemático adequado ao caso, o pesquisador encontra-se em condições de buscar o nível ótimo de resposta da produção ao insumo em estudo, o qual será recomendado aos agricultores. O nível ótimo é tido como o ponto que maximiza o resultado econômico, ou seja, o nível que otimiza a função do lucro implícita. Evidencia-se, assim, a importância da função de resposta.

Pode ser encontrada na literatura mais de uma dezena de funções de produção para explicar a resposta de culturas agrícolas ao uso de insumos. Contudo, com alguns trabalhos recentes consegue-se uma indicação do atual estado do conhecimento neste campo de estudo na agricultura. Grimm et al. (1987) demonstraram que modelos von Liebig de resposta com regimes lineares, onde não é possibilitada a substituição entre insumos (água e nitrogênio), interpretam dados experimentais em uma forma mais adequada do que as funções de produção polinômiais, tradicionalmente utilizadas para expressar a resposta da planta a fertilizantes. Contudo Frank et al. (1989), utilizando a função de produção Mitscherlich-Baule, encontraram evidências de que um padrão de resposta curvilíneo com um platô (máximo físico na resposta) assintótico e um pequeno intervalo de substituição entre os nutrientes possibilita uma melhor interpretação de dados experimentais. Por outro lado, Paris (1992a, 1992b), melhorando a formulação utilizada por Grimm, foi capaz de rejeitar a especificação Mitscherlich-Baule bem como as polinômiais. Finalmente, Kreuz (1994) aprofundou os modelos von Liebig introduzindo a possibilidade de produções decrescentes, bem como rendimentos marginais decrescentes.

Apesar de os estudos do comportamento da resposta da produção ao uso de insumos serem antigos, existem, ainda, questões esperando resposta. Uma delas

diz respeito ao problema das interações nos modelos von Liebig, objetivo do presente trabalho. Contudo uma melhor caracterização do problema se faz necessária. Para tanto, apresenta-se, na seqüência, uma breve revisão sobre o tema.

A lei do mínimo foi desenvolvida por Justus von Liebig no século dezenove. Segundo esta lei, a resposta da produção é condicionada ao nutriente mais escasso no solo, chamado de elemento limitante (Browne 1942). Considerando, apenas, dois insumos, a lei do mínimo pode ser expressa como:

$$Y = \min [f(X_1), f(X_2), m] \quad (1)$$

onde a produção Y está associada com o mais escasso fator de produção entre  $X_1$ ,  $X_2$  ou m; m representa o platô, ou seja, a ausência de resposta aos dois fatores em estudo, sendo graficamente representado por uma superfície paralela aos eixos dos insumos.

Um segundo marco na história das funções de produção na agricultura está associado com o trabalho de Eilhard Alfred von Mitscherlich. Seu trabalho iniciou no começo do presente século, tendo ele desenvolvido conceitos que são bem conhecidos e ainda se encontram em uso pelos agrônomos. O trabalho de Mitscherlich é sumarizado em duas leis: lei do crescimento e lei das relações fisiológicas (Tisdale et al. 1985). Alfred Mitscherlich (1909), estudando a resposta da produção a um único insumo, tinha em mente o desenvolvimento de uma expressão matemática para a lei do mínimo. Seu objetivo nunca foi atingido, mas seus estudos contribuíram com outros aspectos essenciais no que diz respeito à resposta da produção ao uso de insumos, como é o caso da lei das relações fisiológicas e a primeira verificação empírica de rendimentos marginais decrescentes. A seguinte função de produção é associada ao nome de Mitscherlich, caracterizando sua lei do crescimento.

$$Y = A(1 - e^{-cX}) \quad (2)$$

onde Y é a produção, A corresponde ao platô assintótico, c é a resposta do nutriente X e e constitui a base dos logaritmos naturais. A característica curvilínea da expressão e o platô assintótico asseguram os rendimentos marginais decrescentes.

A segunda lei de Mitscherlich, a lei da relações fisiológicas, foi enunciada após a análise dos dados de um grande número de experimentos. Lang (1924) destaca que Mitscherlich já havia reconhecido o fato de que a produção não é de-

pendente apenas do nutriente mais escasso (presente no nível mínimo), mas de todos os fatores de crescimento, desde que estes fatores estejam presentes em quantidades abaixo do ótimo durante o período vegetativo, o que sempre é o caso em qualquer ambiente. Portanto, a produção deve, também, ser dependente de todos os fatores. Tisdale et al. (1985) apresentam a segunda lei de Mitscherlich como: A produção pode ser aumentada por cada fator de produção individualmente, mesmo que ele não esteja presente como o mais escasso (mínimo), contanto que ele não esteja presente no nível ótimo. Lang (1924), contudo, apresentou esta lei em uma forma mais completa: a magnitude da produção é condicionada por todos os fatores de crescimento. Cada nutriente exerce, individualmente, um poder limitante maior na produção quanto mais próximo ele estiver do nível mínimo.

Após o pronunciamento da segunda lei de Mitscherlich, boa parte dos pesquisadores simplesmente abandonaram von Liebig e sua lei do mínimo. Este sentimento pode ser sumarizado por Russell & Russell (1961) quando relatam a lei do mínimo.

"This law unfortunately has only a very limited validity, for if several factors are low, but none too low, increasing any one will increase the yield, as will be shown in the section on the interaction nutrients."

Lang (1924), por outro lado, era de uma opinião diferente. Na página 139 de sua obra, ele deixa claro que a segunda lei de Mitscherlich não invalidou a lei do mínimo de von Liebig:

"We thus arrive at the conclusion that Mitscherlich law is to be regarded only as a modification – a very important one indeed – of the old minimum law, but not as something new that replaces it altogether."

A razão utilizada por Lang para afirmar que a segunda lei de Mitscherlich não invalidou a lei do mínimo é que na lei das relações fisiológicas os fatores de produção não são inteiramente independentes um do outro. Traduzindo literalmente os argumentos de Lang (1924) tem-se: a lei do mínimo pode somente ser considerada superada se o fator aparecendo no nível mínimo puder ser substituído em suas funções por outro fator de crescimento. Mas isto não ocorre. Tome qualquer um dos nutrientes; o nitrogênio por exemplo. Pode sua função na formação da célula, do albúmen, etc. ser executada por outro fator de crescimento? De forma nenhuma! Contudo o que Mitscherlich tem confirmado é que os diferentes fatores de crescimento não são inteiramente independentes entre si, que são possíveis de ser obtidas alterações na produção através de várias e recíprocas combinações dos

fatores. Mas estas relações recíprocas e as alterações na produção têm, não obstante, estreitos limites.

Continuando, Lang (1924) sugeriu uma associação das leis de Liebig e Mitscherlich:

"We must keep in mind that future, Liebig's law need to be modified to include Mitscherlich's law".

Fica claro pela apresentação da segunda lei de Mitscherlich de que o efeito do mínimo necessita ser diferenciado de outros (secundários) efeitos, bem como que a lei das relações fisiológicas precisa ser vista com uma "modificação" da lei do mínimo.

Uma nova fase nos estudos da resposta da produção pode ser caracterizada através do uso de modelos matemáticos para expressar a resposta da produção a mais do que um insumo. O início pode ser atribuído a Baule (1918), que propôs a seguinte função de produção:

$$Y = A(1 - e^{-c_1 X_1})(1 - e^{-c_2 X_2}) \dots (1 - e^{-c_n X_n}) \quad (3)$$

onde  $c_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) é a resposta ao  $i$ -ésimo nutriente  $X_i$ ; os demais símbolos mantêm seus prévios significados. A especificação (3) introduziu a possibilidade de analisar simultaneamente a resposta a vários fatores de produção, sendo melhor conhecida como a função de produção de Mitscherlich-Baule.

Dado que a estimação do modelo (3) requer procedimentos de regressão não linear e dada a ausência de facilidades computacionais no início do século, não causa surpresa o fato de a expressão matemática proposta por Baule ficar quase esquecida, tendo outros pesquisadores, como Balmukand (1928), proposto modelos alternativos.

A análise da resposta da produção a vários insumos foi estendida por Heady & Pesed (1954), Pesek & Heady (1956) e Baum et al. (1956) que popularizaram o uso de funções polinomiais, principalmente em estudos de superfície de resposta. Estas funções são estimadas utilizando-se regressão linear. Após os trabalhos pioneiros citados, as funções de produção quadrática (4) e raiz quadrada (5) passaram a ser comumente utilizados.

$$Y = a + b_1 X_1 + c_1 X_1^2 + b_2 X_2 + c_2 X_2^2 + f X_1 X_2 = u \quad (4)$$

$$Y = a + b_1 X_1 + c_1 X_1^{0,5} + b_2 X_2 + c_2 X_2^{0,5} + f(X_1 X_2)^{0,5} + u \quad (5)$$

onde  $Y$  é a variável dependente;  $a$ ,  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $c_i$ ,  $f$  são parâmetros;  $X_i$  é o nível do  $i$ -ésimo insumo;  $u$  é o termo de erro aleatório.

Em comparando os modelos quadrático e raiz quadrada, o primeiro é criticado por causa da simetria entre a fase crescente e decrescente dos rendimentos (Heady & Dillon 1961; Nelson et al., 1985) e ambos os modelos são criticados por superestimarem o nível ótimo dos insumos (Anderson & Nelson 1975). Dentre os dois, diversos autores têm preferido o modelo raiz quadrada por ser mais flexível do que o quadrático (Nelson et al. 1985; Colwell & Stackhouse 1970). Outra crítica contra os modelos polinomiais é a de que seus parâmetros não possuem significado biológico (Terman & Nelson, Fowler et. al. 1989, Acock & Acock 1991)

No início dos anos setenta observou-se um retorno da lei do mínimo, associada com a introdução do modelo linear-platô (LRP). O modelo matemático, para o caso de um insumo, pode ser visto como (Dillon & Anderson, 1990):

$$\begin{aligned} Y &= \min (Y_1, Y_2) + u \\ Y_1 &= a_1 + b_1 X_1 \\ Y_2 &= m \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $Y_1$  é chamado função de resposta potencial ao insumo  $X_1$  ou primeiro regime;  $Y_2$  o regime do platô;  $X_1$  é o insumo da função de resposta potencial;  $a_1$ ,  $b_1$  são os parâmetros do primeiro regime;  $m$  é o platô;  $u$  é o termo de distúrbância aleatório.

Testes de hipótese para modelos não aninhados (Pesaran, 1974, Godfrey & Pesaran 1983, Davidson & MacKinnon 1981) têm sido utilizados para demonstrar a superioridade dos modelos que seguem a lei do mínimo sobre modelos polinomiais e a formulação de Mitschelich-Baule (Ackello-Ogututu et al. 1985, Grimm et al. 1987, Paris, 1992a, 1992b).

Por fim, Kreuz (1994) demonstrou que os modelos von Liebig podem ser estendidos para contemplar produções decrescentes e rendimentos marginais decrescentes. Os modelos propostos por Kreuz foram:

$$\begin{aligned} Y &= \min (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) + u \\ Y_1 &= a_1 + b_1 X_1 \\ Y_2 &= a_2 + b_2 X_2 \\ Y_3 &= m \\ Y_4 &= g_1 + d_1 X_1 + d_2 X_2 \\ g_1 &\geq m \\ d_1, d_2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 Y &= \min (Y_1, Y_2, Y_3) + u & (8) \\
 Y_1 &= a_1 + b_1 X_1 + c_1 X_1^{0,5} \\
 Y_2 &= a_2 + b_2 X_2 + c_2 X_2^{0,5} \\
 Y_3 &= m
 \end{aligned}$$

onde  $Y$  é o nível de produção;  $Y_1, Y_2$  são dois regimes com rendimentos crescentes para o modelo (7) e crescentes e decrescentes para o modelo (8), associados com os insumos  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente;  $Y_3$  é o regime correspondente ao platô;  $Y_4$  é o regime de produções decrescentes (BP; "back-plan");  $g_1$  o intercepto do regime de BP;  $d_1, d_2$  taxas negativas de incremento nos regimes BP (caso  $d_1$  e  $d_2$  sejam zero, os dados não mostram BP);  $a_1, a_2, b_1, c_1, c_2$  são parâmetros associados com os regimes  $Y_1$  e  $Y_2$ , onde se esperam valores positivos para  $b$  em (7) e valores de  $b$  e  $c$  que caracterizam uma função côncava em (8);  $m$  é o platô; e  $u$  é o termo de erro aleatório.

### Interações e os modelos von Liebig

A principal crítica remanescente contra os modelos von Liebig diz respeito à interação entre os fatores de produção. Vários autores podem ser utilizados para constatar este fato. Russel & Russel (1961) criticam a lei do mínimo utilizando o argumento da interação. Também neste sentido, Nelson et al. (1985) afirmam.

...These models do not lend themselves to situations where interactions between nutrients exist or where a general model that includes site year x added nutrient terms is developed for a combined data set from a series of site years.

Outra referência de crítica à lei do mínimo pode ser vista em Hasset & Banwart (1992). Eles, ao discutirem a lei do mínimo utilizando um barril de água para ilustrá-la, afirmam que o exemplo do barril mostra as limitações da lei de Liebig. Ele não mostra a interação potencial entre fatores de crescimento, uma vez que, por exemplo, níveis altos de fósforo podem induzir deficiência de zinco.

Por definição, existe interação quando a resposta combinada a dois nutrientes for diferente da soma das respostas individuais (Russel & Russel 1961). Ou, quando a resposta a um ou uma série de insumos for modificada através do efeito de um ou mais fatores utilizados conjuntamente (Tisdale et al. 1985). Nos modelos polinomiais a interação é expressa através da presença do termo de produto cruzado entre os fatores de produção (veja 4 e 5). Por outro lado, Lanzer (1977) e

Grimm (1986) demonstraram que a especificação LRP contempla esta forma de interação, apesar dos regimes utilizados terem sido funções lineares, como em (7).

A interação exibida por modelos von Liebig pode ser chamada de "interação de primeira ordem". É importante lembrar que Mitscherlich, através da lei das relações fisiológicas, afirmou: "a magnitude da produção é condicionada por todos os fatores de crescimento. Cada nutriente individualmente exerce um poder limitante maior na produção quanto mais próximo ele estiver do nível mínimo (Lang 1924).

A idéia incorporada pela segunda lei de Mitscherlich foi reinterpretada muitos anos mais tarde por Steenbjerg & Jakobsen (1963), também citado por Tisdale et al. (1985), que afirmam: os parâmetros nas fórmulas não são constantes porque as variáveis nas fórmulas não são independentes; há interações entre nutrientes das plantas, solo e plantas. As interações podem ser medidas, elas são importantes, contudo suas causas não são bem conhecidas. Steenbjerg e Jakobsen encontraram suporte em Terman et al. (1972) que, trabalhando com N e P em plantas jovens de milho, justificam a interação como o efeito da diluição resultante da resposta do crescimento à aplicação de um segundo nutriente deficiente.

Outra contribuição para esta questão é encontrada em Grimm et al. (1987). Grimm conjectura o porquê de o modelo von Liebig ter falhado em rejeitar especificações de resposta polinomiais para o milho silage e beterraba açucareira (embora não fosse rejeitado por eles). Grimm afirma que: uma possibilidade pode ser baseada na noção de interação de segunda ordem entre nutrientes. É importante lembrar que o modelo von Liebig implica interação de primeira ordem entre água e nitrogênio. A interação de segunda ordem pode ser especificada através de funções de resposta da água e do nitrogênio condicionadas ao nível existente do outro nutriente. A interação de segunda ordem pode tomar muitas formas, sendo necessárias pesquisas adicionais para validar esta conjectura.

Outras referências de suporte às interações de segunda ordem podem ser encontradas em MacLeod (1969), Paris & Paris (1985), Tisdale (1985); e Witt (1992).

Tudo indica, portanto, que uma moderna interpretação da lei das relações fisiológicas de Mitscherlich é a de que ela expressa um segundo nível de interação entre fatores de produção. A interação que o modelo LRP e os polinomiais exibem pode ser chamada de interação de primeira ordem. A interação associada à segunda lei de Mitscherlich pode ser chamada de interação de segunda ordem. A lei das relações fisiológicas, caracterizada através dos efeitos de interação de segunda ordem, é expressa analiticamente como uma modificação da lei do mínimo.

O presente estudo procura, portanto, a modificação dos modelos von Liebig pela introdução e teste dos efeitos de interação de segunda ordem no modelo, os quais resultam da lei das relações fisiológicas de Mitscherlich. Este objetivo expressa o desejo de integrar a interpretação da resposta da produção de Mitscherlich ao procedimento de análise caracterizado como von Liebig (por exemplo o modelo (8)). O atendimento a este objetivo deverá resultar em um melhor entendimento do processo biológico que explica as produções agrícolas, como sugerido por Lang (1924):

"... in the future, Liebig's law need to be modified to include Mitscherlich's law, "e por Grimm (1987): "... second-order interaction take many forms, and further research is needed to asses the validity of this conjecture".

## MATERIAL E MÉTODOS

A modificação do modelo von Liebig será obtida através da introdução dos efeitos de interação de segunda ordem no modelo von Liebig. Estes efeitos foram associados pela primeira vez com a lei do mínimo de von Liebig por Paris & Paris (1985). Paris & Paris, tendo encontrado significativa interação entre nitrogênio (N) e fósforo (P) e entre tratamento e ano, sugeriram um modelo von Liebig condicional para analisar os dados em questão:

$$Y = \min [f_{n/p}(N), f_{p/n}(P)] + u \quad (9)$$

onde Y é a produção de alfafa;  $f_{n/p}(N)$  é a função de resposta ao N dada uma específica taxa de P;  $f_{p/n}(P)$  é a função de resposta ao P dada uma específica taxa de N e u é o erro experimental aleatório.

Considerando apenas dados de um ano e dois insumos e escolhendo a especificação raiz quadrada (8) para representar os modelos von Liebig tradicionais, o modelo (9) pode ser estendido para a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} Y &= \min (Y_1, Y_2, Y_3) + u & (10) \\ Y_1 &= \alpha_1(X_2) + \beta_1(X_2)X_1 + \gamma_1(X_2)X_1^{0,5} \\ Y_2 &= \alpha_2(X_1) + \beta_2(X_1)X_2 + \gamma_2(X_1)X_1^{0,5} \\ Y_3 &= m \end{aligned}$$

onde todos os parâmetros em cada regime são uma função do outro insumo. O platô (m) significa a produção máxima que pode ser obtida na situação em estudo.

Assumindo que os parâmetros nos regimes  $Y_1$  e  $Y_2$  no modelo (10) são funções lineares do insumo apropriado, pode-se escrever:

$$\alpha_1(X_2) = a_1 + e_1X_2 \quad (11)$$

$$\beta_1(X_2) = b_1 + f_1X_2 \quad (12)$$

$$\gamma_1(X_2) = c_1 + h_1X_2 \quad (13)$$

$$\alpha_2(X_1) = a_2 + e_2X_1 \quad (14)$$

$$\beta_2(X_1) = b_2 + f_2X_1 \quad (15)$$

$$\gamma_2(X_1) = c_2 + h_2X_1 \quad (16)$$

onde  $e_1$ ,  $e_2$  são interações com os interceptos,  $f_1$ ,  $f_2$  são as interações com os termos lineares e  $h_1$ ,  $h_2$  são as interações com os termos raiz quadrada. Os índices subscritos indicam o regime onde a interação aparece. O modelo (10) pode, então, ser escrito como:

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u \quad (17)$$

$$Y_1 = a_1 + b_1X_1 + c_1X_1^{0,5} + e_1X_2 + f_1X_2X_1 + h_1X_2X_1^{0,5}$$

$$Y_2 = a_2 + b_2X_2 + c_2X_2^{0,5} + e_2X_1 + f_2X_1X_2 + h_2X_1X_2^{0,5}$$

$$Y_3 = m$$

onde todos os símbolos mantêm seus prévios significados.

O modelo (17) corresponde a uma estrutura von Liebig onde os efeitos de interação de segunda ordem, expressos por  $e$ ,  $f$ ,  $h$ , podem influir na produção, caracterizando-se como uma modificação da lei do mínimo. A especificação (17) será referenciada como von Liebig modificado (MVL). Em termos gerais, quando  $X_1$  for o fator mais limitante, a resposta da produção a quantidades crescentes deste insumo é condicionada ao nível de  $X_2$ .

Para o caso de um experimento com dois insumos, em que apenas um possui um claro efeito limitante, um dos regimes no modelo (17) pode não existir, reduzindo o modelo a uma especificação polinomial com platô. Não é o objetivo aqui adiantar este ponto, mas se nos modelos (11) a (16), ao invés de funções lineares se tivesse optado por funções do tipo raiz quadrada, todos os termos em (5) apareceriam neste modelo polinomial com platô, com três ou mais termos de interação.

A pergunta que se faz é se a natureza é melhor explicada através do modelo MVL ou pelos modelos von Liebig tradicionais como, por exemplo, as especificações (7) e (8). Isto pode ser comprovado ajustando-se os referidos modelos a dados experimentais e aplicando-se testes estatísticos.

A estimação dos modelos von Liebig tradicionais ou o modelo MVL segue os precedimentos tradicionais de maximização da função de máxima verossimilhança, os que podem ser desenvolvidos utilizando-se o pacote de programação matemática GAMS, de Brooke et al. (1992). De acordo com Lanzer et al. (1987), o logaritmo da função de máxima verossimilhança pode ser escrito como:

$$\max L = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [Y_i - \min(Y_{1i}, Y_{2i}, Y_{3i})]^2 \quad (18)$$

onde L é o logaritmo da função de máxima verossimilhança a ser maximizada; n é o número de observações;  $\sigma$  é o desvio padrão do modelo;  $Y_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) são as produções observadas; e  $Y_{ji}$  ( $j = 1, 2$ ) são os regimes dos insumos, ou o regime do platô ( $j = 3$ ). Kreuz (1994) apresenta uma discussão detalhada dos processos de estimação.

O desenvolvimento de um procedimento estatístico para a seleção de um modelo perante várias alternativas rivais é campo de estudo recente. De acordo com Paris (1992b) essas técnicas são chamadas de teste de hipótese para modelos não aninhados porque os parâmetros de um modelo não são aninhados no espaço dos parâmetros do modelo alternativo e vice-versa. Portanto, o bem conhecido teste F e o teste da razão de máxima verossimilhança não podem ser aplicados para a verificação da hipótese nula no que diz respeito aos parâmetros de modelos não aninhados. Uma vantagem importante da metodologia de teste de hipótese de modelos não aninhados é a de que não há necessidade de assumir um modelo como verdadeiro. Cada especificação executa, em diferentes momentos, a função de modelo verdadeiro e de alternativo (falso). Suponha-se que seja dada uma hipótese nula e uma associada hipótese alternativa como segue.

$$H_0 : y_i = f(x_i, \beta) + u_{0i} \quad (19)$$

$$H_1 : y_i = g(z_i, \gamma) + u_{1i} \quad (20)$$

onde  $f(x_i, b) + u_{0i}$  e  $g(z_i, y) + u_{1i}$  são modelos estatísticos, possivelmente não lineares, que não compartilham qualquer parâmetro. Por exemplo,  $f(x_i, b)$  poderia ser o modelo Mitscherlich-Baule expresso em (3) enquanto  $g(z_i, y)$  poderia ser o modelo polinomial raiz quadrada (5). Davidson & MacKinnon (1981) demonstraram que a seguinte relação, chamada de teste P, representa o procedimento adequado para a seleção do modelo apropriado.

$$y_i - \hat{f}_i = \alpha(\hat{g}_i - \hat{f}_i) + \hat{F}_i b + e_i \quad (21)$$

onde  $\hat{f}_i$  e  $\hat{g}_i$  são os valores estimados dos modelos sob a hipótese nula e a alternativa, respectivamente.  $\hat{F}_i$  é o  $i$ -ésimo vetor linha da primeira derivada de  $f(x_i, \beta)$  com relação aos parâmetros  $\beta$ , avaliados em suas estimativas  $\hat{\beta}$ , e  $b = (\beta - \hat{\beta})$ . Na equação (21), se o parâmetro  $\alpha$  for significativamente diferente de zero, então, a informação contida no modelo alternativo  $\hat{g}_i$  contribui de modo substantivo para explicar os resíduos do modelo nulo ( $y_i - \hat{f}_i$ ). Nesse caso, a especificação do modelo nulo é insuficiente. Ao contrário, se o parâmetro  $\alpha$  for igual a zero, a informação a respeito de  $\hat{g}_i$  é irrelevante para ( $y_i - \hat{f}_i$ ). Portanto, a variável aleatória  $P = \hat{\alpha} / SD(\hat{\alpha})$  (onde  $SD(\hat{\alpha})$  é o desvio padrão de  $\hat{\alpha}$ ) representa a estatística desta especificação não aninhada. Em outras palavras, se o modelo associado à hipótese nula for especificado corretamente (relativo ao fenômeno que se deseja explicar com ele), o resíduo estimado conteria apenas ruído branco, não relacionado com qualquer outra possível variável explicativa. Ao contrário, se os resíduos do modelo associado com a hipótese nula estiverem relacionados com as variáveis explicativas do modelo alternativo, a especificação do modelo nulo não é completa e, portanto, não é correta. O parâmetro  $\alpha$  tem a função de detectar a força desta relação, caso ela existia, com um valor sempre próximo a um. Quando inexistir a relação, o valor do parâmetro  $\alpha$  estará próximo de zero. Davidson & Mackinnon (1981) demonstraram que  $\hat{\alpha} / SD(\hat{\alpha})$  é distribuído assintoticamente como uma variável normal padronizada. Para completar a verificação da hipótese, é necessário reverter as funções dos modelos e estimar a equação (21) uma segunda vez com  $g(z_i, \gamma)$  como a nova hipótese nula. Tem-se, portanto, quatro eventos possíveis. Suponha que  $P_0 = \hat{\alpha}_0 / SD(\hat{\alpha}_0)$  quando  $f(x_i, \beta)$  é o modelo associado à hipótese nula e  $P_1 = \hat{\alpha}_1 / SD(\hat{\alpha}_1)$  quando  $g(z_i, r)$  for o modelo nulo. Para um dado nível de significância, por exemplo 0,05, o teste P acima conduz a quatro possíveis resultados:

- (a) Aceitar  $H_0$  e rejeitar  $H_1$  quando  $|P_0| < 1,960$  e  $|P_1| > 1,960$
- (b) Rejeitar  $H_0$  e aceitar  $H_1$  quando  $|P_0| > 1,960$  e  $|P_1| < 1,960$
- (c) Rejeitar ambos  $H_0$  e  $H_1$  quando  $|P_0| > 1,960$  e  $|P_1| > 1,960$
- (d) Aceitar ambos  $H_0$  e  $H_1$  quando  $|P_0| < 1,960$  e  $|P_1| < 1,960$

Alterando-se o nível de significância para 0,01, o valor tabulado da estatística vem a ser 2,576. Uma interessante característica do teste de modelos não aninhados é a possibilidade, expressa em (c), de rejeição de ambos os modelos em fa-

vor de um terceiro ainda não considerado. É também possível que a informação utilizada não seja capaz de rejeitar nenhuma das especificações, como em (d). Nesse caso, uma amostra mais acurada deve ser buscada.

Para modelos aninhados, o teste hipótese pode ser executado utilizando o teste da razão de máxima verossimilhança. De acordo com Greene (1993), se  $\hat{L}_u$  e  $\hat{L}_r$  são funções de máxima verossimilhança não restritas e restritas, respectivamente, a razão de máxima verossimilhança é definida como

$$\lambda = \frac{\hat{L}_r}{\hat{L}_u} \quad (22)$$

onde ambos os valores da função de máxima verossimilhança são positivos. Sob certas condições de regularidade, a estatística  $-2\ln\lambda$  é distribuída assintoticamente como Qui-quadrado, com o número de graus de liberdade equivalente ao número de restrições impostas.

## RESULTADOS

Três conjuntos de dados foram analisados para verificar se os modelos MVL interpretam melhor dados experimentos do que os modelos von Liebig tradicionais ou especificações preliminares.

### Milho em Iowa, 1952

O primeiro conjunto de dados analisado foi o experimento de milho coletado por Heady et al. (1955) em 1952. Kreuz (1994) demonstrou que a formulação raiz quadrada von Liebig (SRvL), apresentada em (8), interpreta estes dados de forma superior ao modelo von Liebig com Mitscherlich regimes proposta por Paris (1992a, 1992b). Na Tabela 1 são apresentados os resultados obtidos com o modelo MVL. O valor do logaritmo da função de máxima verossimilhança passa a ser 89,994. Este valor é significativamente maior do que o do modelo SRvL (83.462), com base na estatística Qui-quadrado com 6 graus de liberdade (teste da razão de máxima verossimilhança), uma vez que  $(-2(83,462 - 89,994) > 11,07)$ . Desta for-

ma, o modelo MVL possibilita uma melhor interpretação para este conjunto de dados.

**TABELA 1. Resultados de estimação de modelos para o experimento de milho em Iowa (1952) considerando efeitos de interação de segunda ordem.†**

---

**Raiz quadrada polinomial‡:**

$$Y = -0.057 - 0.316N - 0.417P + 0.635N^{0.5} + 0.852P^{0.5} + 0.341(PN)^{0.5} + u$$

(0.066); (0.040); (0.040); (0.087); (0.087); (0.039);

log L = 69.058; df = 108;  $\hat{\sigma} = 0.136$ ;

**Linear von Liebig (LRP)‡:**

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$$

$$Y_1 = 0.200 + 1.222P \quad (0.041); (0.076);$$

$$Y_2 = 0.290 + 0.960N \quad (0.042); (0.097);$$

$$Y_3 = 1.246 \quad (0.023);$$

log L = 65.221; df = 109;  $\hat{\sigma} = 0.137$ ;

**Mitscherlich von Liebig‡:**

$$Y = \min(Y_1, Y_2) + u$$

$$Y_1 = 1.291 (1 - 0.870e^{-2.286P}) \quad (0.028); (0.033); (0.313)$$

$$Y_2 = 1.291 (1 - 0.791e^{-1.734N}) \quad (0.028); (0.029); (0.227);$$

log L = 76.060; SSR = 1.752;  $R^2 = 0.928$ ; df = 109;  $\hat{\sigma} = 0.124$ ;

**Raiz quadrada von Liebig (SRvL):**

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$$

$$Y_1 = 0,161 - 0,432P + 1,396P^{0,5} \quad (0,037); (0,059); (0,093)$$

$$Y_2 = 0,280 + 0,618N + 0,296N^{0,5} \quad (0,035); (0,266); (0,215)$$

$$Y_3 = 1,276 \quad (0,040);$$

log L = 83,462; SSR = 1,543;  $R^2 = 0,936$ ;  $\hat{\sigma} = 0,116$ ; df = 107;

**Raiz quadrada von Liebig modificado (MVL completo):**

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$$

$$Y_1 = 0,162 - 0,606P + 1,074P^{0,5} - 0,003N + 0,112NP + 0,381NP^{0,5}$$


---

Continua...

TABELA 1. Continuação.

---

(0,058); (0,129); (0,235); (0,029); (0,144); (0,248);  
 $Y_2 = 0,241 - 0,468N + 1,099N^{0,5} + 0,043P + 0,042PN + 0,098PN^{0,5}$   
 (0,081); (0,141); (0,247); (0,060); (0,108); (0,187);  
 $Y_3 = 1,273$  (0,020);  
 $\log L = 89,994$ ;  $SSR = 1,376$ ;  $R^2 = 0,943$ ;  $\hat{\sigma} = 0,110$ ;  $df = 101$ ;

$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$   
 $Y_1 = 0,156 - 0,544P + 0,973P^{0,5} + 0,570NP^{0,5}$  (0,034); (0,072); (0,126); (0,067);  
 $Y_2 = 0,303 - 0,508N + 1,40N^{0,5} + 0,108PN$  (0,042); (0,046); (0,088); (0,019);  
 $Y_3 = 1,285$  (0,026);  
 $\log L = 89,679$ ;  $SSR = 1,384$ ;  $R^2 = 0,943$ ;  $\hat{\sigma} = 0,110$ ;  $df = 105$ ;

---

† = Os valores entre os parênteses são os desvios padrões obtidos por bootstrapping para o modelo MVL completo.

‡ = Paris (1992a).

Os altos desvios padrões nos termos de interação em ambos os regimes  $Y_1$  e  $Y_2$  estão associados com a superparametrização que a completa modificação do modelo introduz (todos os parâmetros em cada regime são dependentes do outro insumo). É possível obter uma solução adicional onde todos os parâmetros são significativos a 5%. Esta solução é atingida através da retirada de alguns parâmetros no modelo completo, gerando o modelo MVL incompleto mostrado na Tabela 1. Observe que o valor de  $\log L$ , (logaritmo da função de máxima verossimilhança) está próximo do obtido com o modelo completo, apesar de se usarem 4 parâmetros a menos.

A análise econômica foi conduzida maximizando a função da margem bruta. Utilizando o modelo SRvL como exemplo, obtém-se:

$$\max \pi = PyY - PnN - PpP \quad (23)$$

sujeito a:

$$Y \leq 0,161 - 0,432P + 1,396P^{0,5}$$

$$Y \leq 0,280 + 0,618N + 0,296N^{0,5}$$

$$Y \leq 1,276$$

onde  $\pi$  representa a margem bruta, e  $P_y$ ,  $P_p$ ,  $P_n$  representam os preços do milho, do fósforo e do nitrogênio, respectivamente;  $Y$  representa a produção;  $N$  e  $P$  representam as quantidades a aplicar de nitrogênio e fósforo, respectivamente. Os resultados podem ser encontrados na Tabela 2. As doses ótimas sugeridas pelo modelo polinomial raiz quadrada é umas das menos rentáveis, uma vez que principalmente a recomendação de  $N$  é alta. Por outro lado, a dose ótima de insumos sugerida pelo modelo LRP é a que proporciona o melhor resultado econômico, indicando o maior nível ótimo de produção através do menor uso de insumos. Apesar deste resultado (baixo uso de insumos e boa rentabilidade) obtido com o modelo LRP ser desejável, os resultados estatísticos têm demonstrado que modelos curvilíneos representam melhor o comportamento da natureza. Os níveis ótimos de insumos sugeridos pelos modelos SRvL e MVL (completo) proporcionam lucros similares, mas o MVL recomenda um maior uso de  $N$  para uma condição de preços considerada normal. Note que o modelo MVL (incompleto) recomenda um nível ótimo de insumos diferente de MVL (completo). Os resultados de ambos, LRP e MVL (completo), não se mostraram sensíveis a mudanças nos níveis de preços (insumos ou produto). Para o modelo LRP este resultado era esperado, uma vez que os regimes são funções lineares. Um ponto adicional diz respeito ao fato de as recomendações ótimas oriundas do modelo von Liebig com regimes Mitscherlich serem as de menor rentabilidade para a condição de preços normais e altos preços de venda. Provavelmente este resultado está associado com o fato de este modelo possuir um platô assintótico, sendo incapaz de contemplar rendimentos decrescentes.

**TABELA 2. Análise econômica para os dados experimentais do milho em Iowa (1952).**

Função	Preços normais				Altos custos				Preço de venda alto			
	N*	P*	Y*	M.	N*	P*	Y*	M.	N*	P*	Y*	M.
	0,15	0,22	0,25	bruta	0,30	0,44	0,25	bruta	0,15	0,22	0,50	bruta
Raiz quadr. polinom.	210	178	125	243	129	109	110	187	282	239	133	567
Linear von Liebig	100	86	125	278	100	86	125	244	100	86	125	589
Mitscherlich Liebig	152	120	122	225	112	89	114	213	192	150	125	565
Raiz quadr. v. Liebig	108	175	125	258	97	119	117	211	111	213	128	576
MVL completo	139	176	127	258	139	179	127	198	139	179	127	576
MVL incompleto	176	192	129	253	0	0	16	39	176	192	129	574

\* Indica o nível ótimo: N e P em libras/acre; Y em bushels/acre.

### Milho em Iowa (1953 – resíduo)

O segundo conjunto de dados analisado nunca foi utilizado para testar a hipótese do mínimo de von Liebig. Os dados correspondem ao efeito residual no experimento de milho de 1952, analisado em Heady et al. (1955). Em outras palavras, eles correspondem à resposta obtida no segundo ano do experimento (1953) quando nenhum fertilizante foi adicionado. Avaliando o valor do logL (Tabela 3) dos modelos testados, a função de Mitscherlich-Baule foi a que mostrou o pior comportamento. A função polinomial quadrática, a polinomial quadrática-platô e a SRsV são similares no valor de logL (em torno de 110). Note-se que o valor de log L obtido com o modelo SRvL (110,932) é significativamente superior ao obtido com o LRP (105,886), através do teste da razão de máxima verossimilhança, a 5%, o que comprova a superioridade dos modelos von Liebig curvilíneos. Por outro lado, o valor de logL para o modelo MVL (120,686) é significativamente superior ao do modelo SRvL. Novamente é possível obter um modelo modificado com todos os desvios padrões significativos (MVL incompleto), mantendo-se o valor de logL muito próximo (119,521)

**TABELA 3. Resultados estimados para o experimento de milho em Iowa, residual (1953).†**

---

#### Quadrática Polinomial:

$$Y = 0,074 + 0,150P - 0,051P^2 + 0,062N - 0,018N^2 + 0,068NP + u$$

(0,032); (0,031); (0,009); (0,031); (0,009); (0,008);  
 log L = 109,759; SSR = 0,973;  $R^2 = 0,810$ ;  $\hat{\sigma} = 0,095$ ; df = 108;

#### Quadrática-Platô Polinomial:

$$Y = \min(Y_1, Y_2) + u$$

$$Y_1 = 0,092 + 0,129P - 0,046P^2 + 0,040N - 0,013N^2 + 0,076NP$$

(0,056); (0,043); (0,010); (0,049); (0,011); (0,015);  
 $Y_2 = 0,681$  (0,053);  
 log L = 110,476; SSR = 0,960;  $R^2 = 0,812$ ;  $\hat{\sigma} = 0,092$ ; df = 107;

#### Mitscherlich-Baule:

$$Y = 1,498 (1 - 0,819^{e-0,827P}) (1 - 0,889^{e-0,178N}) + u$$

(0,772); (0,043); (0,168); (0,050); (0,133);  
 log L = 99,664; SSR = 1,162;  $R^2 = 0,775$ ;  $\hat{\sigma} = 0,101$ ; df = 109;

---

Continua...

**TABELA 3. Continuação.**


---

Linear von Liebig (LRP):

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$$

$$Y_1 = 0,116 + 0,275P \quad (0,029); (0,041)$$

$$Y_2 = 0,122 + 0,190N \quad (0,020); (0,015);$$

$$Y_3 = 0,692 \quad (0,099);$$

$$\log L = 105,886; \text{SSR} = 1,041; R^2 = 0,797; \hat{\sigma} = 0,096; \text{df} = 109;$$

Raiz quadrada von Liebig (SRvL):

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$$

$$Y_1 = 0,100 + 0,157P + 0,152P^{0.5} \quad (0,037); (0,099); (0,117);$$

$$Y_2 = 0,164 + 0,341N - 0,228N^{0.5} \quad (0,026); (0,059); (0,085);$$

$$Y_3 = 0,681 \quad (0,052);$$

$$\log L = 110,932; \text{SSR} = 0,953; R^2 = 0,814; \hat{\sigma} = 0,091; \text{df} = 107;$$

Raiz quadrada von Liebig modificado (MVL completo):

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$$

$$Y_1 = 0,126 - 0,905P + 1,552P^{0.5} - 0,018N + 0,325NP - 0,424NP^{0.5} \\ (0,075); (0,322); (0,580); (0,057); (0,116); (0,216);$$

$$Y_2 = 0,086 - 0,191N + 0,340N^{0.5} + 0,063P + 0,290PN - 0,326PN^{0.5} \\ (0,069); (0,102); (0,169); (0,044); (0,76); (0,114);$$

$$Y_3 = 0,681 \quad (0,044);$$

$$\log L = 120,686; \text{SSR} = 0,802; R^2 = 0,843; \hat{\sigma} = 0,084; \text{df} = 101;$$

Raiz quadrada von Liebig modificado (MVL incompleto):

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$$

$$Y_1 = 0,090 - 0,972P + 1,722P^{0.5} + 0,346NP - 0,485NP^{0.5} \\ (0,032); (0,401); (0,712); (0,134); (0,233);$$

$$Y_2 = 0,177 - 0,157N + 0,230N^{0.5} + 0,277PN - 0,263PN^{0.5} \\ (0,025); (0,081); (0,112); (0,055); (0,064);$$

$$Y_3 = 0,685 \quad (0,046);$$

$$\log L = 119,521; \text{SSR} = 0,819; R^2 = 0,840; \hat{\sigma} = 0,085; \text{df} = 103;$$


---

† Os valores entre os parênteses são os desvios padrões.

‡ Modelo sugerido por Heady et al. (1955).

Utilizando o teste de hipótese P para a comparação dos modelos não aninhados, a especificação SRvL não é capaz de rejeitar os modelos polinomiais (Tabela 4). Cada alternativa rejeita a outra neste caso, uma vez que os valores obti-

dos para  $a/SD(a)$  são significativos. Por outro lado, o modelo MVL é capaz de rejeitar as especificações polinomiais, não sendo rejeitado por elas. O modelo Mitscherlich-Baule foi excluído do teste por ter apresentado um fraco desempenho em termos do valor log L. Tem-se, portanto, novamente uma boa indicação da superioridade das especificações que integram a lei do mínimo e interações de segunda ordem na interpretação de dados experimentais.

**TABELA 4. Resultados do teste P para modelos não aninhados para o experimento residual de milho em Iowa (1953).**

Hipótese alternativa	Hipótese nula			
	Raiz quadrada von Liebig	Quadrática	Quadrática-Platô	Modificado Liebig incompleto
Raiz Quadr. v Liebig (SRvL)	...	2,664**	2,406*	aninhado
Quadrática	2,707**	...	0,474	0,569
Quadrática-Platô	2,669*	1,238	...	0,395
Modificado Liebig inc. (MVL)	aninhado	4,530**	4,319**	...

\* e \*\* indicam significância a  $P < 0,05$  e  $P < 0,01$ , respectivamente.

† Sob a hipótese nula, a estatística P é distribuída como uma variável normal estandarizada.

É importante notar (Tabela 3) que o valor do platô é similar no modelo SRvL e no MVL completo (1,276 e 1,273). Contudo, se for escolhido o modelo incompleto, o platô é mais elevado (1,285). Como a mesma tendência foi observada no prévio conjunto de dados, alguma restrição pode ser levantada quanto ao uso de modelos incompletos.

### Algodão em West Side (1968)

O terceiro conjunto de dados analisado para estudar a modificação dos modelos von Liebig foi o experimento de algodão em West Side, Califórnia, em 1968, coletados por Hexem & Heady (1978). Estes dados são interessantes porque é estudada a resposta a três insumos. Infelizmente eles são compostos por apenas 36 observações, o que faz com que sejam reduzidos os graus de liberdade ao utilizar modelos com um número expressivo de parâmetros, como é o caso dos MVL. Por isso, somente algumas indicações em termos da introdução dos efeitos de segunda ordem podem ser buscados. Para este conjunto de dados, Kreuz (1994) propôs um modelo von Liebig com regimes lineares e produções decrescentes (7), o modelo

LRPBP. Com este modelo Kreuz superou o modelo Leontief Generalizado (GL) proposto por Pope & Hallam (1989) para estes dados.

Note-se que o modelo chamado MVL para este caso (Tabela 5) não possui um regime para o nitrogênio (N). Tem-se que o N agindo, apenas, como interação nos regimes da água e espaçamento possibilita uma melhor interpretação dos dados. Comparando os modelos MVL e o LRPBP, o primeiro, além de utilizar um parâmetro a menos, possibilita um valor superior de log L, podendo isto ser considerado como uma evidência da superioridade da especificação MVL. No modelo MVL o platô não foi estimado. Naturalmente, não se trata de uma nova teoria, apenas uma consequência do reduzido número de observações. A consequência deste modelo MVL incompleto pode ser vista na Tabela 6, onde o teste de hipótese para modelos não aninhados rejeita os modelos alternativos, mas é também rejeitado pelas especificações LRP e LRPBP. Provavelmente a ausência do platô seja a razão do modelo MVL ser rejeitado (embora os rejeite) por modelos que não consideram interações de segunda ordem. Para solucionar este ponto faz-se necessário experimentar com um maior número de observações.

**TABELA 5. Resultados obtidos para o experimento de algodão em West Side, California (1968).**

---

Generalizado Leontief (GL) ou Raiz quadrada polinomial\*:

$$Y = - 2.873 - 7.523W + 9.465W^{0,5} - 2.456N + 3.236N^{0,5} - 16.180S + 9.396S^{0,5} - 2.341S^{0,5}W^{0,5} + 3.646S^{0,5}N^{0,5} - 5.110W^{0,5}N^{0,5} + u$$

(0.857); (1.869); (2.115); (0.706); (1.342); (3.366); (2.769); (3.601); (2.808); (2.025);  
log L = 34.532; SSR = 0.310;  $R^2 = 0.729$ ;  $df = 26$ ;  $\hat{\sigma} = 0.109$ ;

Linear von Liebig com back-plant (LRPBP)

$$Y = \min (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) + u$$

$Y_1 = 0,914 + 2,205W$  (0,092); (1,556);  
 $Y_2 = 0,880 + 2,721N$  (0,083); (1,197);  
 $Y_3 = 0,672 + 8,715S$  (0,113); (2,555);  
 $Y_4 = 1,356$  (0,272);  
 $Y_5 = 3,270 - 3,409W - 2,185N - 5,311S$  (0,746); (1,382); (0,845); (2,291);  
log L = 46,968; SSR = 0,149;  $R^2 = 0,870$ ;  $\hat{\sigma} = 0,064$ ;  $df = 25$ ;

Linear von Liebig com back-plan modificado (MVL):

$$Y = \min (Y_1, Y_2, Y_3) + u$$


---

Continua...

**TABELA 5. Continuação.**

$$Y_1 = 0,878 + 0,245W + 10,962NW \quad (0,029); (0,217); (1,328);$$

$$Y_2 = 0,604 + 13,299S - 12,776NS \quad (0,089); (3,136); (8,043);$$

$$Y_3 = 3,259 - 3,335W - 1,996N - 5,822S \quad (0,534); (0,920); (0,598); (1,936);$$

$$\log L = 51,390; SSR = 0,121; R^2 = 0,894; \hat{\sigma} = 0,058; df26;$$

† Os valores entre os parênteses são os desvios padrões.

‡ Modelo sugerido por Kreuz (1994).

\* Modelo sugerido por Pope e Hallam (1989).

**TABELA 6. Resultados do teste P para modelos não aninhados para o experimento de algodão West Side, California, 1968.**

Hipótese alternativa	Hipótese nula <sup>†</sup>			
	Leontief Generalizado	Linear von Liebig	Linear Liebig back-plan	Modificado von Liebig
Leontief Generalizado (GL)	---	1,387	3,574**	0,135
Linear von Liebig (LRP)	4,194**	---	0,872	2,056*
Linear Liebig back-plan (LRPBP)	8,913**	2,166*	---	2,593**
Modificado von Liebig (MVL)	7,089**	3,976**	3,923**	---

\* e \*\* indicam significância a  $P < 0,05$  e  $P < 0,01$ , respectivamente.

† Sob a hipótese nula, a estatística P é distribuída como uma variável normal estandarizada.

### Discussão geral dos modelos MVL

Os três conjuntos de dados analisados dão suporte aos modelos MVL. Isto significa que a conjugação da lei do mínimo e efeitos de interação de segunda ordem possibilitam uma forma mais adequada de interpretação de dados experimentais. Conjecturas podem ser feitas para uma melhor compreensão dos processos que estão atuando.

Um ponto importante diz respeito à substituição aparente. Neste sentido é argumentado que à medida que o nível de um insumo é aumentado, ele altera a disponibilidade do ou dos outros fatores. A lei do mínimo mantém sua validade ao nível celular ou em termos de nutrientes disponíveis. Por exemplo, Grimm (1986) destaca o caso de experimentos envolvendo níveis crescentes de fósforo e de cálcio em solos com pH baixo e baixo nível de fósforo, freqüentemente encontrados no Brasil. De acordo com a lei do mínimo, se o fósforo for o nutriente mais limi-

tante, a adição de calcário ao solo não deveria ocasionar alteração no nível de produção. Contudo, as culturas agrícolas normalmente respondem ao uso de calcário nestas condições. O que ocorre é que a adição de calcário altera a disponibilidade de fósforo, o que ocasiona a resposta, em termos de produção, por parte da cultura. Grimm esclarece que não há violação da lei do mínimo neste exemplo, uma vez que, apesar de ser adicionado calcário ao solo, a cultura responde ao fósforo, o qual tem sua disponibilidade alterada. Portanto, prossegue Grimm, existem interações na natureza que podem levar a uma interpretação errônea dos fenômenos básicos, como é o caso da lei do mínimo.

O caso explicado por Grimm usando P e calcário pode, provavelmente, ser estendido. Tomando o caso do N e P (dois conjuntos de dados com estes dois insumos foram analisados) é possível supor que, em um solo onde estes dois nutrientes estejam escassos, a adição de P (por exemplo) conduza a um melhor crescimento do sistema radicular. Esta melhoria do sistema radicular pode levar a uma maior área de absorção de N do solo.

Outras evidências de substituição aparente são relatadas por Sinclair & Park (1993). Como visto, os efeitos de segunda ordem que os modelos MVL são capazes de detectar, não permitem que se afirme que o princípio da não-substituição esteja sendo violado. Eles apenas mostram que há outros fenômenos interferindo no processo de resposta das culturas agrícolas ao uso de insumos que ainda precisam ser melhor conhecidos, como afirmado por Steenbjerg & Jacobsen (1963).

## CONCLUSÃO

Os efeitos de interação de segunda ordem foram primeiramente associados com a lei das relações fisiológicas de Eilhard von Mitscherlich, no início do século. Nos anos sessenta, Steenbjerg e Jacobsen deram-lhes uma nova interpretação, tendo os efeitos de interação de segunda ordem sido associados a não-existência de constantes, onde cada parâmetro é uma função dos outros insumos. Recentemente, os efeitos de interação foram associados a um problema de energia (fotosintetizados) por Sinclair e Park (1993). Os modelos von Liebig podem ser alterados para incluir efeitos de interação de segunda ordem. Estes modelos são chamados de von Liebig modificado (MVL). Estes modelos possibilitam substituição (aparente) de insumos sem violar o princípio básico da essencialidade dos nutrientes, um dos alicerces do modelo. Isto porque a substituição técnica que os modelos MVL indicam pode ser associada com fenômenos que não se dão em nível celular.

Uma recomendação adicional deste trabalho diz respeito ao tamanho dos experimentos a serem conduzidos nas unidades de pesquisa. Para obter funções de

produção que considerem efeitos de interação de segunda ordem, devem ser introduzidos diversos novos parâmetros no modelo von Liebig. Dada a superioridade comprovada das especificações MVL e considerando-se a dificuldade de obter a significância estatística para modelos MVL completos nos casos em que o número de observações for reduzido, sugere-se a condução de experimentos com grande número de observações. Se um número devesse ser fixado, a sugestão é que ele não seja inferior a 100 para um experimento de dois insumos (pelo menos 10 níveis de cada insumo em um experimento onde cada tratamento seja repetido uma vez).

## REFERÊNCIAS

- ACKELLO-OGUTU, C., Q. PARIS, AND W.A. WILLIAMS. "Testing a von Liebig Crop Response Function Against Polynomial Specification." *Amer.J. Agr. Econ.* 67(1985): 873-880.
- ACOCK, B. AND M. C. ACOCK. "Potential for Using Long-Term Field Research Data to Develop and Validate Crop Simulators". *Agron. J.* 83(1991): 56-61.
- ANDERSON, R. L. AND L. A. NELSON. "A Family of Models Involving Intersecting Straight Lines and Concomitant Experimental Designs Useful in Evaluating Response to Fertilizer Nutrients." *Biometrics* 31(1975):303-318
- BALMUKAND, B. H. "Studies in Crop Variation. V. The relation between Yield and Soil Nutrients." *J. Agric. Sci.* 18(1928): 602-627.
- BAULE, B. "Zu Mitscherlich Gezetz der Physiologischen Beziehung gen." *Landwirtschaftliche Jahrbücher* 51(1918):363-385.
- BAUN, E. L., E.O HEADY, AND J. BLACKMORE. "Methodological Procedures in the Economic Analyses of Use of Fertilizer Data." Iowa State Univ. Press, Ames, IA, 1956.
- BROOKE, A., D. KENDRICK, AND A. MEERAUS. "GAMS, A User's Guide." Redwood City, California: The Scientific Press, 1992, 289p.
- BROWNE, C. A. "Liebig and the Law of the Minimum." In: Moulton. F. R. "Liebig and After Liebig." American Association for the Advancement of Science, 1942.
- COWELL, J. D. & K. M. STACKHOUSE. "Some Problems in the Estimation of Simultaneous Fertilizer Requirements of Crops from Response Surfaces." *Australian J. Exp. Agric. and Animal Husbandry* 10(1970): 183-195.
- DAVIDSON, R. AND J. G. MACKINNON. "Several Tests for Model Specification in the Presence of Alternative Hypotheses." *Econometrica* 49(1981): 781-793.

- DILLON, J. L. AND J. R. ANDERSON. "The analysis of Response in Crop and Livestock Production." Pegamon Press, 1990. 251p.
- FRANK, M.D.B., R. BEATTIE, AND M.E. EMBLETON. "A Comparison of Alternative Crop Response Models." *Amer. J. Agr. Econ.* 72(1990):597-603.
- FOWLER, D. B., J. BRYDON, AND R. J. BAKER. "Nitrogen Fertilization of No-Till Winter Wheat and Rye. I. Yield and Agronomic Responses." *Agron. J.* 81(1989): 66-72.
- GODFREY, L. G. AND M. H. PESARAN. "Tests of Nonnested Regression Models." *J. Econometrics* 21(1983): 133-154.
- GREENE, W. H. "Econometric Analysis." New York University. Second Edition, 1993. 791p.
- GRIMM, S. S. "Estimation of Water and Nitrogen Crop Response Functions: a Factor Nonsubstitution Model Approach." University of California, Davis, 1986. 143p. (Ph. D. Thesis).
- GRIMM, S. S., Q. PARIS, AND W. A. WILLIAMS. "A von Liebig Model for Water and Nitrogen Crop Response." *Western J. Agric. Econ.* 12(1987): 182-192.
- HASSET, J. J. AND W. L. BANWART. "Soils and Their Environment." New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1992.
- HEADY, E. O., J. L. DILLON. "Agricultural Production Functions." Iowa State Univ. Press, 1961. 667p.
- HEADY, E. O. AND J. PESEK. "A Fertilizer Production Surface with Specification of Economic Optima for Corn Crown on Calcareous Ida Silt Loam." *J. Farm Econ.* 36(1954): 466-482).
- HEADY, E. O., J. T. PESEK, AND W. G. BROWN. "Corn Response Surfaces and Economic Optima in Fertilizer Use." Iowa State Exp. Sta. Research Bulletin 424, 1955.
- HEXEM, R. W. AND E. O. HEADY. "Water Production for Irrigated Agriculture." Iowa State Univ. Press, Ames, IA, 1978.
- JOLLIFF, G. D. AND M. SEDDIGH "Evaluating Nitrogen Fertilizer and Timig for Meadowfoam Seed and Dry Matter Production." *Agron. J.* 83(1991): 99-103.
- KREUZ, C. L. "von Liebig Medels with Decreasing Yields, Mitscherlich's Law of Physiological Relations and the Relative Yield Framework." Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia de Produção. Florianópolis, 1994. 159. (Tese de Doutorado).
- LANG, E. "The Law of the Soil." In: Spillman, W. J. "The Law of Diminishing Returns." World Book Company, 1924. 178p.

- LANZER, E. A. "Fertilizer Recommendation from Dynamic Liebig-Mitscherlich Model: the Case Wheat-Soybeans Southern Brasil." University of California, Davis, 1977. 213p.(Ph.D. Thesis).
- LANZER, E. A., Q. PARIS, AND W. A. WILLIAMS. "A Nonsubstitution Dynamic Model for Optimal Fertilizer Recommendation." Giannini Foundation monograph Number 41. 1987. 53p.
- MACLEOD, L. B. "Effect of N, P, and K and Their Interaction on the Yield and Kernel Weight of Barley in Hydroponic Culture." *Agron. J.* 61(1969):26-29.
- MITSCHERLICH, E. A. "Das Gesetz des Minimums und das Gesetz des abnehmenden Bodenertrages." *Landwirtschaftliche Jahrbücher* 38(1969):537-552.
- NELDER, J. A. "Inverse Polynomials, a Useful Group of Multi-Factor Response Functions." *Biometrics* 22(1966): 128-141.
- NELSON, L. A., R. D. VOSS, AND J. PESEK. "Agronomic and Statistical Evaluation of Fertilizer Response." In: "Fertilizer Technology and Use." Soil Science Society of America, 1985.
- PARIS, Q. "The von Liebig Hypothesis." *Amer. J. Agric. Econ.* 74(1992a): 1019-1028).
- PARIS, Q. "The Return of von Liebig's Law of the Minimum'." *Agron. J.* 84(1992): 1040-1046.
- PARIS, Q. AND P. PARIS. "A von Liebig Response Function to Nitrogen and Phosphorus for Hay Production from Irrigated Pastures." *Grass and Forage Sci.* 40(1985): 213-220.
- PESARAN, M. H., "On the General Problem of Model Selection." *Rev. Econ. Stud.* 41(1974): 153-172.
- PESEK, J. AND E. O. HEADY. "A Two Nutrient-Response Function with Determination of Economic Optima for Rate and Grade of Fertilizer for Alfalfa." *Soil Sci. Proc.* 20(1956): 240-246.
- POPE, R. D. AND A. HALLAM. "Separability Testing in Production Economics." *Amer. J. Agric. Econ.* 70(1988): 142-152.
- RUSSELL, E. J. AND E. W. RUSSEL. "Soil Conditions and Plant Growth." Longmans, 9th ed., 1961.
- SINCLAIR, T. R. AND W. I. PARK. "Inadequacy of the Liebig Limiting-Factor Paradigm for Explaining Varying Crop Yields." *Agron. J.* 85(1993): 742-746.
- STEENBJERG, F. AND S. T. JAKOBSEN. "Plant Nutrition and Yield Curves." *Soil Sci.* 1(1963): 69-88.
- TERMAN, G. L. AND L. A. NELSON. "Comments on Use of Multiple Regression in Plant Analysis Interpretation." *Agron. J.* 68(1976):148-150.

TERMAN, G. L., J. C. NOGGLE, AND O. P. ENGELSTAD. "Concentrations of N and P in Young Corn Plants, as Affected by Various Growth-Limiting Factors." **Agron. J.** 64(1972): 384-388.

TISDALE, S. L., W. L. NELSON, AND J. D. BEATON. "Soil Fertility and Fertilizers." Macmillan Publishing Co., 4th ed, 1985. 719p.

WITT, C. T. "Resource Use Efficiency in Agriculture." **Agricultural Systems** 40(1992): 125-151.