DEFINIÇÕES ALTERNATIVAS DE ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO: REVISÃO E APLICAÇÃO

João Eustáquio de Lima[1]

RESUMO

O conceito de elasticidade de substituição apareceu na literatura econômica no início da década de trinta; ao longo dos anos, no entanto, o conceito foi sendo questionado e revisto. Os questionamentos e as diferentes definições do conceito parecem pouco divulgados, considerando-se o reduzido número de referências que é feito a tal problema nos trabalhos empíricos que tratam da estimação de elasticidades de substituição. Neste trabalho, objetiva-se fazer uma breve revisão do conceito de elasticidade de substituição, apresentar suas diferentes definições e mostrar o significado de cada uma. Destaca-se o fato de que o conceito de elasticidade de substituição, para o caso de mais de dois fatores de produção, é por natureza ambíguo, razão pela qual aparecem diferentes definições. Além da elasticidade de substituição de *Allen*, que é amplamente conhecida, são apresentadas as elasticidades de substituição de *Hicks, Allen-Uzawa, Morishima e de McFadden.* Procura-se destacar as diferenças entre essas definições, bem como a relevância de cada uma na análise de substituição de fatores no processo de produção. Uma comparação entre as diversas elasticidades é feita com dados de propriedades rurais eletrificadas de Minas Gerais. Estimou-se uma função de produção *translog*, com o objetivo de avaliar a natureza e o grau de substitutibilidade entre energia elétrica e outros fatores de

---

[1] Professor Titular do Departamento de Economia Rural da Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG. CEP 36571-000
E-mail: jelima@mail.ufv.br. Agradecimentos a dois revisores da RER e ao apoio do CNPq.

produção. Os resultados mostraram grande coerência entre os diferentes tipos de elasticidades, mas importantes diferenças foram evidenciadas. A elasticidade de substituição de *Morishima* destaca-se por fornecer mais informações sobre as características do processo de substituição entre os fatores de produção.

Palavras-chave: Taxa marginal de substituição, Elasticidade de substituição, Elasticidade de substituição de *Allen*, Elasticidade de substituição de *Allen-Uzawa*, Elasticidade de substituição de *Hicks*, Elasticidade de substituição de *Morishima*, Elasticidade de substituição de *McFadden*.

1. Introdução

Um dos conceitos mais conhecidos da teoria econômica é o de *Elasticidade de Substituição (ES)*. Com o advento da função de produção CES (constant elasticity of substitution) e, principalmente, das formas funcionais flexíveis(translog, quadrática, Leontief), muito utilizadas como função de produção, função de custo e função de lucro, tornou-se popular a estimação empírica de elasticidades de substituição. O objetivo principal é, geralmente, mostrar se os fatores de produção são substituitos ou complementares no processo produtivo. Estimativas empíricas de elasticidades de substituição foram objeto de inúmeros trabalhos durante as décadas de 70 e 80, devido ao grande interesse de se conhecer a natureza de substitutibilidade entre capital e energia, suscitada pelos famosos choques do petróleo.

Originalmente, o conceito de ES objetivava mostrar como as participações relativas de mão-de-obra e capital na renda total variavam, resultantes de mudanças nas quantidades relativas dos fatores. Mais tarde, o conceito foi revisado e passou a ser usado para classificar fatores como substitutos e complementares e para avaliar o grau de *"facilidade"* ou de *"dificuldade"* com que os fatores de produção podem ser substituídos uns pelos outros no processo produtivo. Com bem menos intensidade, aparece na literatura o uso de ES para analisar a substituição entre produtos ao longo de uma curva de transformação e para substituição entre bens de consumo ao longo de uma curva de indiferença.

Concentrando-se na teoria da produção, este trabalho tem o objetivo principal de fazer uma breve revisão do conceito de ES e mostrar suas diferentes definições. Procura-se mostrar que, no caso de mais de dois fatores de produção, existem várias definições de ES. A menos que se visualizem as diferenças entre as definições alternativas e entenda a importância de cada uma, a relevância e até mesmo a existência do conceito podem ser questionadas. Utilizaram-se dados de propriedades rurais eletrificadas do Estado de Minas Gerais para ilustrar o cálculo e a comparação das diferentes elasticidades. O objetivo principal foi avaliar a natureza e o grau de substitutibilidade entre energia elétrica e outros fatores de produção, principalmente derivados de petróleo.

2. Características da Tecnologia de Produção

Considere a tecnologia de produção representada por uma função de produção, da forma geral

$$Y_i = f\ (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \ldots\ldots, X_{ik}) \qquad (1)$$

em que Y_i é a quantidade produzida por unidade de tempo; $X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \ldots\ldots, X_{ik}$ são as quantidades utilizadas dos fatores de produção por unidade de tempo; f representa a função de produção, e $i = 1,2,3,\ldots\ldots, N$ são unidades produtoras. Para que a função (1) possa representar a tecnologia de produção, ela tem de possuir uma série de propriedades básicas que a torna útil na análise econômica. Resumidamente, essas propriedades são domínio real e finito, monotonicidade, continuidade, concavidade e duas vezes diferenciável (Chambers, 1988; Fuss et al., 1978). Monotonicidade assegura produtos marginais positivos e concavidade significa taxas marginais de substituição decrescentes.

Um aspecto importante do processo de produção é que o mesmo volume de produto pode ser obtido com diferentes combinações de fatores, isto é, um fator pode ser substituído por outro sem afetar o nível de produção. Medidas das possibilidades de substituição entre os fatores são importantes para o processo de tomada de decisão. Uma dessas medidas é a *Taxa Marginal de Substituição (TMS). A TMS do fator i pelo fator j (TMS_{ij}) é definida como o número de unidades que o fator i é diminuído quando o uso do fator j é aumentado em uma unidade, mantendo-se constante o nível de produção e a quantidade dos outros fatores.* Para determinar como a quantidade do fator X_i se ajusta a mudanças no nível do fator X_j, mantendo-se constante o nível de produção e a quantidade dos outros fatores, basta diferenciar (1) em relação a X_j obtendo-se

$$dY = \frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial f}{\partial X_j} = 0$$

Resolvendo-se para a razão dos fatores, tem-se a TMS do fator i pelo fator j, dada por

$$TMS_{ij} = -\frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \frac{\partial f / \partial X_j}{\partial f / \partial X_i} = \frac{f_j}{f_i} \qquad (2)$$

em que f_i e f_j são os produtos marginais dos fatores X_i *e* X_j, respectivamente.

Dada a condição de que a *isoquanta* (curva que representa combinações de fatores que fornecem a mesma quantidade de produto) é convexa em relação à origem, o valor da TMS decresce à medida que X_j aumenta (e X_i diminui) ao longo de uma isoquanta. A condição de convexidade da isoquanta é, então, uma expressão do princípio da TMS decrescente, baseada na pressuposição de que fica cada vez mais difícil substituir um fator à medida que a substituição vai progredindo.

2.1. Elasticidade de Substituição

A taxa marginal de substituição depende das unidades usadas para medir as quantidades dos fatores de produção. Uma medida semelhante, livre de escala e de mais fácil interpretação, é a Elasticidade de Substituição (ES).

O conceito de ES foi introduzido por Hicks (1932). Inicialmente, esse autor não forneceu uma definição muito precisa do conceito. Definiu ES como uma medida da facilidade com que um fator pode ser substituído por outro e apresentou uma formulação matemática do conceito. Uma definição mais precisa foi apresentada por Robinson (1933), segundo o qual a ES representa a mudança percentual na razão de fatores dividida pela mudança percentual na razão entre seus produtos marginais, isto é, na taxa marginal de substituição entre os dois fatores. Logo após a introdução do conceito por Hicks e Robinson, muitas discussões sobre o significado e sobre a interpretação da ES surgiram na literatura, destacando-se, Hicks (1933), Kahn (1933,1935), Lerner (1933,1934,1936), Meade (1934a,1934b), Machlup (1935), Pigou (1934), Sweezy (1933) e Tarshis (1934). Uma revisão sobre os diferentes usos da ES pode ser vista em Morrissett (1953).

O conceito de ES foi usado por Hicks para analisar as participações relativas de mão-de-obra e capital na renda total, resultantes de mudanças nas quantidades relativas dos fatores. Basicamente, o objetivo era ter uma medida sucinta dos efeitos de mudanças no preço de um fator sobre sua participação na renda total gerada, ou seja, na distribuição de renda. Inicialmente, não se tinha como objetivo usar o conceito para classificar fatores como substitutos e complementos e avaliar a facilidade com que um fator pode ser substituído por outro, em razão de mudanças nos preços relativos. O uso do conceito para esse fim foi iniciado por Robinson (1933). A definição de elasticidade de substituição é relativamente simples, no caso de dois fatores de produção. Para o caso de três ou mais fatores, aparecem certas complicações. Por isso, devem-se separar os dois casos.

a) Caso de Dois Fatores de Produção

Seja a função de produção $Y = f(X_1, X_2)$, em que Y é a quantidade de produto, e X_1 e X_2 são as quantidades usadas dos dois fatores. De acordo com Hicks (1932) e Robinson (1933), *a elasticidade de substituição* (σ_{21}) *do fator* X_2 *pelo* X_1(*aumenta* X_1 *e diminui* X_2) *é definida como a razão entre a mudança percentual na relação entre as quantidades dos fatores e a mudança percentual na taxa marginal de substituição dos fatores, mantendo-se constante o nível de produção.* Como a taxa marginal de substituição é igual à relação entre os produtos marginais, tem-se

$$\sigma_{21} = \frac{\dfrac{d(X_2/X_1)}{X_2/X_1}}{\dfrac{d(f_1/f_2)}{f_1/f_2}} = \frac{d[\log(X_2/X_1)]}{d[\log(f_1/f_2)]} \tag{3}$$

Graficamente, a ES mede o grau de curvatura da isoquanta. Na Figura 1, a combinação inicial dos fatores é representada pelo ponto A. Neste ponto, a relação entre os fatores é dada pela inclinação do raio OA, isto é, x_2/x_1, enquanto a TMS_A é dada pela inclinação da tangente ST à isoquanta. Suponha que a combinação de fatores se desloque para o ponto B. Agora, a relação entre os fatores é dada pela inclinação do raio OB, isto é, x_2'/x_1', e a TMS_B é dada pela inclinação da tangente

S'T'. Uma medida do grau de curvatura da isoquanta, que representa o nível de facilidade de substituição entre os fatores, é dada pela razão entre a mudança na relação de fatores e a mudança na TMS entre os fatores. A elasticidade de substituição é esta razão, em termos percentuais, para torná-la independente das unidades de medida.

A Figura 2 mostra três tipos de isoquantas com respectivos valores para as elasticidades de substituição. Dependendo das condições técnicas de produção, podem-se ter tanto uma grande mudança na relação de fatores associada a uma pequena mudança na TMS (inclinação da isoquanta), quanto uma pequena mudança na relação de fatores associada a uma grande mudança na TMS. Se, para uma pequena mudança na TMS, for possível realizar uma grande mudança na combinação de fatores, a elasticidade de substituição será alta, significando que é possível substituir uma grande quantidade de X_2 por X_1, sem uma grande mudança na TMS, ou seja, é tecnicamente "fácil" substituir um fator por outro.

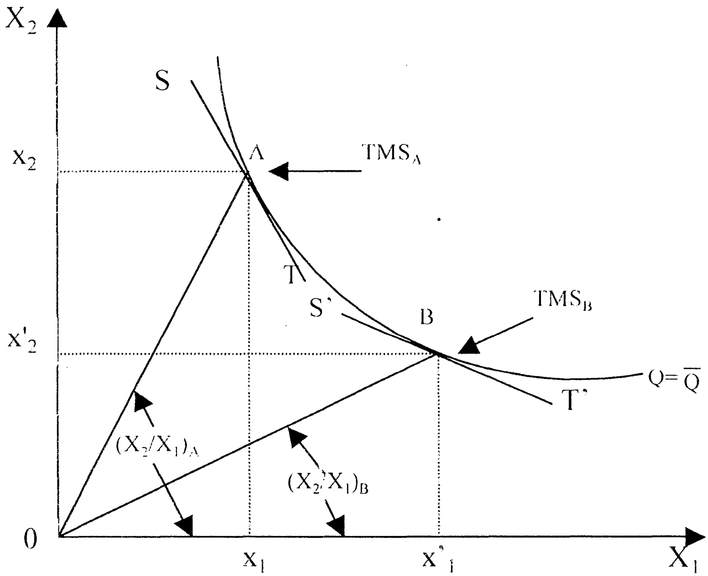

Figura 1- Representação Gráfica da Elasticidade de Substituição

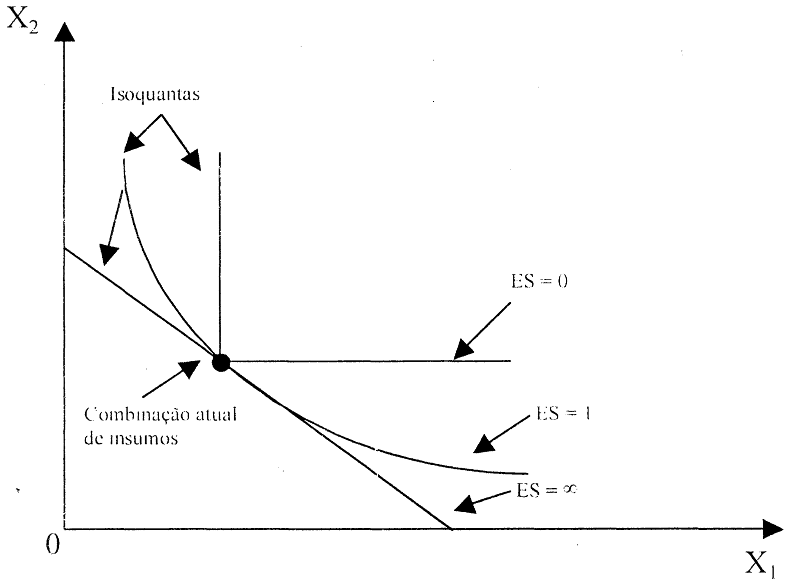

Figura 2- Relação entre Formas de Isoquantas e Valores da Elasticidade de Substituição.

Valores altos para a elasticidade de substituição são associados a isoquantas que têm pequena curvatura, enquanto valores baixos são associados a isoquantas que possuem curvatura forte.

A elasticidade de substituição pode ser expressa, também, em termos dos preços dos fatores. Tendo em vista que, em equilíbrio competitivo, a razão entre os produtos marginais dos fatores é igual à respectiva relação de preços, a equação (3) pode ser escrita como em

$$\sigma_{21} = \frac{\dfrac{d(X_2/X_1)}{X_2/X_1}}{\dfrac{d(w_1/w_2)}{w_1/w_2}} = \frac{d[\log(X_2/X_1)]}{d[\log(w_1/w_2)]} \qquad (4)$$

que w_1 e w_2 são os preços dos fatores X_1 e X_2 , respectivamente. Esta formulação é, originalmente, atribuída a Robinson (1933).

A equação (4) relaciona mudança nos preços relativos com mudança na combinação ótima de fatores, ou seja, relaciona condições técnicas de produção com condições de mercado. Assim, a elasticidade de substituição irá indicar a facilidade de mudança na relação de fatores em razão da mudança nos preços relativos. Uma elasticidade alta significa que é relativamente fácil substituir um fator por outro, quando os preços mudam, mas a elasticidade de substituição é determinada pelas características técnicas de produção. Supondo maximização de lucro por parte dos empresários e condições de mercado competitivo, políticas que afetam os preços relativos dos fatores serão efetivas, dependendo das características da tecnologia de produção (Robinson,1933).

A expressão (3) é difícil de ser calculada. Além disso, do ponto de vista econométrico, é mais interessante uma formulação com base na função de produção que possa ser estimada com dados empíricos. A formulação (3) pode ser escrita em termos das derivadas parciais da função de produção, observando que, ao longo de uma isoquanta X_2 é função de X_1, e que

$$d(X_2/X_1) = \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{X_1^2} \qquad (5)$$

e

$$d({}^{f_1}\!/_{f_2}) = \frac{\partial({}^{f_1}\!/_{f_2})}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial({}^{f_1}\!/_{f_2})}{\partial X_2} dX_2 \qquad (6)$$

Mas, por (2), $dX_2 = -\dfrac{f_1}{f_2} dX_1$ e as equações (5) e (6) podem ser escritas como

$$d({}^{X_2}\!/_{X_1}) = -\frac{X_1({}^{f_1}\!/_{f_2}) + X_2}{X_1^2} dX_1 \qquad (7)$$

e

$$d({}^{f_1}\!/_{f_2}) = -({}^{f_1}\!/_{f_2})\frac{\partial({}^{f_1}\!/_{f_2})}{\partial X_2} - \frac{\partial({}^{f_1}\!/_{f_2})}{\partial X_1}) dX_1 \qquad (8)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial({}^{f_1}\!/_{f_2})}{\partial X_1} = \frac{f_2 f_{11} - f_1 f_{12}}{f_2^2} \qquad (9)$$

e

$$\frac{\partial({}^{f_1}\!/_{f_2})}{\partial X_2} = \frac{f_2 f_{12} - f_1 f_{22}}{f_2^2} \qquad (10)$$

Dado que

$$\sigma_{21} = \frac{\dfrac{d({}^{X_2}\!/_{X_1})}{{}^{X_2}\!/_{X_1}}}{\dfrac{d({}^{f_1}\!/_{f_2})}{{}^{f_1}\!/_{f_2}}} = \frac{d({}^{X_2}\!/_{X_1})\dfrac{f_1}{f_2}}{d({}^{f_1}\!/_{f_2})\dfrac{X_2}{X_1}} \qquad (11)$$

substituindo (9) e (10) em (8) e (7) e (8) em (11), obtém-se uma expressão para a elasticidade de substituição baseada diretamente na função de produção, ou seja,

$$\sigma_{21} = -\frac{f_1 f_2 (X_1 f_1 + X_2 f_2)}{X_1 X_2 (f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2)} \qquad (12)$$

em que $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2$.

Em termos matriciais, (12) pode ser escrita como

$$\sigma_{21} = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2}{X_1 X_2} \frac{F_{12}}{F} \qquad (13)$$

em que F é o determinante da matriz Hessiana orlada da função de produção, isto é,

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

e F_{12} é o co-fator associado a f_{12}. Sendo $f(X)$ contínua e duas vezes diferenciável, o teorema de Young garante que $f_{12} = f_{21}$, logo $F_{12} = F_{21}$. Dessa forma, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, ou seja, a elasticidade de substituição para o caso de dois fatores de produção é simétrica, isto é, a elasticidade de substituição de X_2 por X_1 é igual à elasticidade de substituição de X_1 por X_2. Pode-se mostrar, também, que, para uma função de produção quasi-côncava com dois fatores, σ_{12} será sempre positiva, indicando que os dois fatores são sempre substitutos (Chambers, 1988). Esses resultados só são válidos para o caso de dois fatores de produção.

Valores da elasticidade de substituição próximos de zero indicam poucas possibilidades de substituição, enquanto valores significativamente maiores que zero indicam maior flexibilidade de ajustes nas quantidades dos fatores, quando os preços relativos mudam.

Pela equação (4), verifica-se que a ES é, na verdade, a elasticidade da razão entre as quantidades dos fatores em relação a mudanças na relação de preços. Porém, segundo Mundlak (1968), não são todas as definições de ES que preservam esta característica da definição original. Observa-se que a razão de preços, w_1/w_2, varia quando w_1, ou w_2, ou ambos mudam. Isto, conduz a diferentes medidas de substituição entre fatores que podem ser interpretadas como elasticidades de substituição. Inicialmente, pode-se expressar (4) por

$$\sigma_{21} = \frac{d\log(X_2/X_1)}{d\log(w_1/w_2)} = \frac{d\log X_2 - d\log X_1}{d\log w_1 - d\log w_2} = \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{\hat{w}_1 - \hat{w}_2} \quad (14)$$

em que o acento circunflexo significa mudança percentual. Esta é a definição de Hicks/ Robinson para o caso de dois fatores de produção: variação percentual na razão de fatores sobre a variação percentual na relação de preços. Mundlak (1968) observa que, dependendo de como a relação de preços varia, podem-se ter três medidas alternativas de substitutibilidade entre os fatores

$$ES_{2P}^{2F} \equiv \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{\hat{w}_1 - \hat{w}_2} \quad (15)$$

Esta ES, então, mede o efeito de variação na relação de preços sobre a razão de fatores, como proposto originalmente.

A segunda medida é a ES *"dois fatores-um preço"*, representada por

$$ES_{1P}^{2F} \equiv \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{\hat{w}_1} \quad (16)$$

que mede o efeito de variação no preço de um fator sobre a razão dos fatores.

Finalmente, a terceira medida, denominada ES *"um fator-um preço"*,

$$ES_{1P}^{1F} \equiv \frac{\hat{x}_2}{\hat{w}_1} \qquad (17)$$

que mede o efeito de variação no preço de um fator sobre a quantidade usada do outro. Esta medida é muito semelhante à elasticidade de preço compensada da demanda derivada do fator. Será mostrado adiante que as diferentes elasticidades de substituição, apesar de pretenderem medir a mesma coisa, apresentam características distintas e enquadram-se nas diferentes categorias definidas por Mundlak (1968).

b) Caso de Três ou mais Fatores

No caso de mais de dois fatores de produção, o conceito de elasticidade de substituição pode ser ambíguo, razão por que existem várias definições. O problema resume-se no fato de que, neste caso, existem várias maneiras de definir as derivadas parciais em relação ao que se mantém fixo.

No caso de dois fatores, mostrou-se que a elasticidade de substituição é sempre positiva e, por isso, os fatores são substitutos. Uma mudança na relação de preços faz com que a firma use maior quantidade do fator relativamente mais barato. Entretanto, no caso de três ou mais fatores, todas as quantidades podem ser ajustadas em função de mudança em uma das relações de preços. Nesse caso, as elasticidades de substituição poderão ser positivas ou negativas e os fatores podem apresentar-se como "substitutos", quando maior quantidade de um estiver associada à menor quantidade do outro, ou como "complementos", quando maior quantidade de um estiver associada à maior quantidade do outro. Em ambos os casos, a elasticidade é denominada elasticidade de substituição.

A seguir, serão apresentadas quatro definições de elasticidades de substituição, para o caso de mais de dois fatores, que são, basicamente, generalizações da definição para o caso de dois fatores de produção.

(i) Elasticidade de Substituição Direta

A elasticidade de substituição direta (σ_{ij}^{D}) é idêntica à definição (3) ou (4), exceto ao fato de que , além do nível de produção, as quantidades de todos os outros fatores são mantidas constantes. Essa generalização, atribuída a Hicks e Allen (1934), é denominada *Elasticidade de Substituição de Hicks (ESH)*. Naturalmente, este é um conceito de curto prazo, porque não leva em conta os ajustamentos nas quantidades de todos os fatores decorrentes de uma mudança nos preços. Em termos práticos, é uma definição idêntica àquela de dois fatores.

(ii) Elasticidade Parcial de Substituição de ALLEN

Uma segunda definição de elasticidade de substituição, para o caso de mais de dois fatores, é atribuída a Allen (1938) e é simplesmente a generalização da expressão (13). As elasticidades, neste caso, são denominadas *Elasticidades Parciais de Substituição de Allen (ESA)*, definidas por

$$\sigma_{ij}^{A} = \frac{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \ldots\ldots + X_k f_k}{X_i X_j} \frac{F_{ij}}{F} , \qquad (18)$$

$$\sigma_{ij}^{A} = \frac{\sum_i f_i X_i}{X_i X_j} \frac{F_{ij}}{F} , \qquad i , j = 1,2,3,\ldots\ldots,k$$

em que F é o determinante da matriz Hessiana orlada da função de produção, isto é,

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & \cdots & f_k \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & \cdots & f_{1k} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & \cdots & f_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & \cdots & \cdots & f_{kk} \end{vmatrix}$$

e F_{ij} é o co-fator do elemento f_{ij} no determinante F. Pela definição (18), tem-se que as σ_{ij}^A são simétricas, isto é, $\sigma_{ij}^A = \sigma_{ji}^A$ para todo $i \neq j$. No caso de dois fatores de produção, $\sigma_{ij}^A = \sigma_{ij}^D$. Observa-se que σ_{ii}^A pode ser calculado e poderia ser chamado de elasticidade de substituição "direta", mas possui pouco significado econômico. Esses valores devem ser negativos, indicando que todo fator de produção é complementar a ele próprio e confirma a concavidade da função de produção.

Dada uma função de produção estimada, podem-se calcular as ESAs, pela equação (18). No entanto, dependendo da forma funcional da função de produção, esse cálculo pode tornar-se bastante trabalhoso. Por isso, a estimação empírica de elasticidades de substituição por meio da função de produção não é tão usada quanto a abordagem pela função de custo ou de lucro. Binswanger (1974) destaca as vantagens de se usar a função de custo em vez da função de produção.

As denominadas *Elasticidades Parciais de Substituição de Allen-Uzawa* são as mesmas de Allen, porém definidas pelas funções de custo. Estas possuem formas bem mais simples, o que parece ser uma razão a mais para a preferência da abordagem pela função de custo nas aplicações empíricas. Uzawa (1962) mostra que, para funções de produções homogêneas, (18) pode ser calculado por

$$\sigma_{ij}^{A} = \frac{C(Y,w)C_{ij}(Y,w)}{C_i(Y,w)C_j(Y,w)} \tag{19}$$

em que C é o custo de produção, Y é a produção, w é o vetor de preços dos fatores,

$$C_{ij}(Y,w) = \frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial w_j}, \; C_i(Y,w) = \frac{\partial C}{\partial w_i} \text{ e } C_j(Y,w) = \frac{\partial C}{\partial w_j}.$$

As elasticidades parciais de substituição de Allen-Uzawa são as *duais* de Allen. Para a maioria das funções de custo essas elasticidades são bastante fáceis de serem calculadas. Acrescenta-se a isto o fato de que medidas de precisão (erro-padrão) para as elasticidades são mais difíceis de serem obtidas quando se usa a equação (18).

A ESA permaneceu por muito tempo como uma medida adequada da natureza e grau de substituição entre fatores de produção. No início da década de 60, suas características e seu significado econômico começaram a ser questionados, principalmente após a definição de sua dual pela função de custo.

Originalmente, ES é uma medida da mudança percentual na razão de dois fatores, correspondente à mudança percentual na TMS entre eles ou na razão de preços. Porém, pode-se mostrar que a ESA mede mudança na quantidade de um fator em função de mudança no preço ou na produtividade marginal do outro fator. Na terminologia de Mundlak (1968), a ESA é uma elasticidade de substituição tipo *um fator-um preço*. Dessa forma, torna-se muito semelhante à elasticidade-preço cruzada da demanda (compensada) do fator. De fato, Allen (1938) mostra que

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{\partial X_j}{\partial w_i}\frac{w_i}{X_j} = \alpha_i(\sigma_{ij}^{A} - \eta) \tag{20}$$

Em que ε_{ij} é a elasticidade-preço cruzada da demanda para o fator X_i; w_i é preço do fator X_i; α_i é a participação do fator X_i no custo total; σ_{ij}^{A} é a elasticidade parcial de substituição entre X_i e X_j; e η é a elasticidade-preço da demanda do produto.

Admitindo-se que o preço do produto seja determinado por um mercado competitivo e, portanto, seja constante, a elasticidade η torna-se irrelevante em (20), podendo-se definir a seguinte relação

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_i \sigma_{ij}^{A} \tag{21}$$

ou

$$\sigma_{ij}^{A} = \frac{1}{\alpha_i} \varepsilon_{ij} \tag{22}$$

ou seja, *a elasticidade parcial de substituição de Allen é igual à elasticidade-preço cruzada de demanda do fator ponderada pelo inverso da participação do fator, cujo preço varia, no custo total.* Por isso, a ESA é uma elasticidade tipo *"um fator-um preço"*. Verifica-se que ε_{ij}se mantém assimétrica. Allen (1938) usa (22), para classificar os fatores X_i e X_j como complementos(σ_{ij}^{A}<0)e substitutos(σ_{ij}^{A}>0), quando o preço de um dos fatores varia, mantendo-se constante o preço dos outros fatores.

Com base em (21) e (22), Chambers (1988) argumenta que as ESAs não possuem nenhuma informação a mais que a elasticidade-preço cruzada da demanda compensada (produção constante) do fator. Da mesma forma, Blackorby e Russell (1989) apresentam várias críticas à ESA, mostrando que: a) Ela não tem significado quantitativo nem qualitativo além da elasticidade-preço cruzada; b) Não possui as propriedades estabelecidas na definição original de Hicks; c) Não é uma medida adequada da curvatura da isoquanta e, por isso, não mede a "facilidade" de substituição entre fatores; d) Não fornece informação sobre participação relativa dos fatores na renda, resultante de mudanças nas quantidades dos fatores; e) Não pode ser interpretada como a derivada logarítmica da razão de fatores, em relação à TMS ou à relação de preços, como estabelece a definição original; f) Não adiciona nada além da elasticidade–preço cruzada para classificar fatores em substitutos e complementos; g) Sua simetria não é uma propriedade desejável. Esses autores mostram que assimetria é uma característica própria do conceito de ES, no caso n-dimensional.

Além disso, Thompson e Taylor (1995) argumentam que a ESA não é apropriada para a análise de substituição entre fatores, nos casos em que a parcela de um fator no custo total é pequena, pois pequenas variações na utilização do fator causa grandes variações na ESA.

(iii) Elasticidade de Substituição de Morishima

Uma terceira generalização do conceito de elasticidade de substituição, para o caso de mais de dois fatores, é atribuída a Morishima (1967) e elaborada por vários autores, como, por exemplo, Kuga e Murota (1972), Koizumi (1976) e Blackorby e Russell (1981, 1989).

A *Elasticidade de Substituição de Morishima (ESM)*, entre os fatores X_i e X_j, é definida como a *razão entre a mudança percentual na relação de fatores e a mudança percentual na TMS entre X_i e X_j, mantendo-se constante o nível de produção e todas as outras taxas marginais de substituição,* isto é,

$$\sigma_{ij}^{M} = \left.\frac{d[\log(X_i/X_j)]}{d[\log(f_j/f_i)]}\right|_{Y,\ f_k/f_i,\ k \neq i,j \ e \ i \neq j} \tag{23}$$

A ESM não é simétrica e, como mostrado por Kuga e Murota (1972), σ_{ij}^{M} pode ser calculada por

$$\sigma_{ij}^{M} = \frac{f_j}{x_i}\frac{F_{ij}}{F} - \frac{f_j}{x_j}\frac{F_{jj}}{F} \tag{24}$$

e, σ_{ji}^{M}, por

$$\sigma_{ji}^{M} = \frac{f_i}{x_j}\frac{F_{ji}}{F} - \frac{f_i}{x_i}\frac{F_{ii}}{F} \tag{25}$$

Com $\sigma_{ij}^{M} \neq \sigma_{ji}^{M}$, tem-se valores diferentes para a elasticidade de substituição de X_i por X_j e para a elasticidade de substituição de X_j por X_i.

Observando-se a expressão (13), pode-se verificar que as ESMs são relacionadas com as ESAs. Tem-se que,

$$\sigma_{ij}^{M} = \alpha_j(\sigma_{ij}^{A} - \sigma_{jj}^{A}) \tag{26}$$

e

$$\sigma_{ji}^{M} = \alpha_i(\sigma_{ji}^{A} - \sigma_{ii}^{A}) \tag{27}$$

em que

$$\alpha_j = \frac{f_j x_j}{\sum_j f_j x_j}$$

Observa-se que σ_{ii}^{M} não é definido, enquanto σ_{ii}^{A} pode ser calculado. As ESMs são denominadas de *elasticidades totais de substituição* (*full elasticities of substitution*).

No caso de dois fatores, ESM = ESA, e as EAMs são simétricas. Pode-se mostrar que ESM = ESA e, portanto, simétricas, para toda função de produção com elasticidades de substituição constantes, como Cobb-Douglas e CES (Kuga e Murota, 1972).

As ESMs possuem algumas características importantes, das quais se destacam assimetria e relação com a ESA na classificação de fatores como complementares e substitutos. Com relação à assimetria, Blackorby e Russell (1989) mostram que, para o caso de mais de dois fatores, as elasticidades de substituição são naturalmente assimétricas, uma vez que as direções tomadas pelas derivadas parciais são, em cada caso, diferentes. Simetria de elasticidades de substituição é um conceito aparentemente simples, mas difícil de ser justificado em termos econômicos.

Considere a demanda de fatores

$$x_i = x_i(w_1, w_2, ..., w_i, w_j, ..., w_n, Y) \tag{28}$$

A elasticidade-preço da demanda de um fator é dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j}\frac{w_j}{x_i}, \quad i, j = 1,2,....,n. \tag{29}$$

A elasticidade de substituição é uma medida do efeito de variação na relação de preços dos fatores, w_i/w_j sobre a combinação ótima, X_j/X_i. A relação de preços pode vaiiar com mudanças em w_i, em que w_j ou em ambos, mas diferenciação parcial requer que somente um preço varie de cada vez. Quando w_i varia, todas as relações de preços,

$$w_i/w_j, \; j = 1,2,....,n, \; i \neq j,$$

variam, e todas as demandas compensadas se ajustam. A mesma variação percentual em w_i/w_j pode ser obtida com uma variação em w_j. Neste caso, o efeito sobre as quantidades ótimas será, em geral, diferente, pois a derivada parcial na direção da coordenada i é diferente da derivada parcial na direção da coordenada j, ou séja, o efeito sobre X_j/X_i depende de qual preço varia. Por isso, a característica de assimetria é inerente à elasticidade de substituição.

Koizumi (1976) mostra que as ESMs possuem uma interpretação bastante instrutiva em termos da teoria da demanda derivada dos fatores. Combinando-se (22) com (26) e (27), pode-se verificar que as ESMs podem ser rescritas como:

$$\sigma_{ij}^{M} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{jj} \tag{30}$$

e

$$\sigma_{ji}^{M} = \varepsilon_{ji} - \varepsilon_{ii} \tag{31}$$

O significado da ESM torna-se mais claro em (30) e (31). Considere σ_{ij}^{M} que mede o grau de substituição de X_i por X_j e suponha que ocorra um decréscimo de w_j. O efeito sobre a combinação ótima X_j / X_i é dividido em duas partes: o efeito sobre X_i, dado por ε_{ij} e o efeito sobre X_j, dado por ε_{jj}. O efeito-substituição líquido é obtido pela dedução do efeito que w_j tem sobre X_j, pela lei da demanda.

Na terminologia de Mundlak (1968), a ESM é uma elasticidade tipo *dois fatores-um preço*. O lado direito da expressão (30) pode ser escrito como

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{jj} = \frac{\partial \log(X_i / X_j)}{\partial \log(w_j)} \tag{32}$$

o que mostra que a ESM é uma medida apropriada do efeito de uma mudança no preço de X_j sobre a relação entre as quantidades dos fatores. Assim, a ESM tem significado econômico mais relevante que a ESA. Dois fatores, X_i e X_j serão substitutos pela ESM, se um aumento no preço w_j fazer com que a razão X_i / X_j aumente. Este é o efeito líquido mostrado por (30) ou (31).

De acordo com (30), a elasticidade de substituição de Morishima pode, então, ser definida como *a elasticidade de substituição de X_i por X_j que mede a mudança percentual na quantidade empregada de X_i, causada por uma mudança percentual de 1% no preço de X_j, deduzindo-se o efeito percentual sobre X_j* (Koizumi, 1976).

A segunda característica das ESMs refere-se à relação com as ESAs na classificação de fatores como complementares ou substitutos. Dois fatores podem ser complementares pela ESA ($\sigma_{ij}^{A} < 0$), mas substitutos pela ESM($\sigma_{ij}^{M} > 0$). Por outro lado, se dois fatores são substitutos de acordo com a ESA ($\sigma_{ij}^{A} > 0$), eles serão também substitutos pela ESM($\sigma_{ij}^{M} > 0$). Essas relações podem ser usadas para decidir a classificação de fatores em complementares e substitutos (Chambers,1988).

Segundo Blackorby e Russell (1989), a ESM é mais indicada para comparações de resultados provenientes de estudos que usam amostras de tamanhos diferentes, medidas diferentes para certos fatores, como capital, por exemplo, e são estimados com número diferente de fatores. Esses autores mostram que as ESAs não são invariantes com relação aos insumos omitidos no modelo, mesmo que estes sejam separáveis. Assim, as ESAs estimadas num estudo com três fatores não são comparáveis àquelas estimadas num estudo com quatro fatores. Nesses casos, sugere-se usar as ESMs.

(iv) Elasticidade de Substituição de McFadden

Das definições de elasticidade de substituição, talvez esta seja a menos conhecida. Esta definição é atribuída a McFadden (1963), e a elasticidade é denominada *Elasticidade de Substituição Sombra (ESS) ou shadow elasticity of substitution.*

Esta elasticidade foi originalmente definida como a dual da ESH. Enquanto a ESH é definida pela função de produção, a ESS é definida pela função de custo, mantendo-se constante o custo médio e os preços dos outros fatores. Para McFadden (1963), ela é uma elasticidade de longo prazo, porque as quantidades dos outros fatores podem ajustar dados os preços constantes.

A ESS pode ser calculada como uma média ponderada das elasticidades de Morishima, σ_{ij}^{M} e σ_{ji}^{M}, para cada par de fatores. Tem-se

$$\sigma_{ij}^{S} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_j}\sigma_{ij}^{M} + \frac{\alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}\sigma_{ji}^{M} \qquad (33)$$

Em termos das ESA, tem-se

$$\sigma_{ij}^{S} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}(2\sigma_{ij}^{A} - \sigma_{ii}^{A} - \sigma_{jj}^{A}). \qquad (34)$$

em que α_i e α_j são parcelas de custo dos fatores X_i e X_j, respectivamente. A ESS é uma elasticidade tipo *dois fatores–dois preços*, conservando o significado da definição original de Hicks/Robinson.

Em síntese, estas são as definições alternativas de elasticidade de substituição encontradas na literatura. O conceito fundamental é o mesmo, mas interpretações diferentes levam a definições operacionais alternativas que fornecem valores estimados diferentes. O conhecimento das diferentes definições é importante para que o uso do conceito seja feito de forma adequada.

3. Análise Empírica

Pela teoria da produção, a estimação empírica de elasticidades de substituição pode ser feita por meio de função de produção, da função de custo ou da função de lucro. A abordagem pela função de produção é a menos usada. As razões devem ser dificuldade de cálculo e deficiência de dados. As ESAs, calculadas pela função de custo, são as elasticidades utilizadas com maior freqüência em trabalhos empíricos.

Será usada uma função de produção *translog* no cálculo das diferentes elasticidades de substituição entre fatores, na agricultura do

Estado de Minas Gerais. Considere que tecnologia de produção seja representada por uma função de produção da forma geral:

$$Y_i = f\ (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4}, \ldots, X_{il}, X_{i,l+1}, \ldots, X_{ik}, X_{i,k+1}, X_{i,k+2}) \qquad (35)$$

em que $i = 1,2,3,\ldots, N$ são propriedades rurais; Y_i é o valor da propriedade i; X_1 é a quantidade de mão-de-obra utilizada, $X_2, \ldots, X_l$ são as quantidades de insumos energéticos utilizadas, $X_{l+1}, \ldots, X_k$ são as quantidades de outros insumos utilizados, X_{k+1} é a quantidade de terra utilizada; X_{k+2} é a quantidade de capital utilizada; e f representa a função de produção.

Pressupondo-se separabilidade fraca entre terra, capital e os outros fatores de produção, a função (35) pode ser reescrita como

$$Y_i = f\ [g(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4}, \ldots, X_{il}, X_{i,l+1}, \ldots, X_{ik}), X_{i,k+1}, X_{i,k+2}] \qquad (36)$$

em que g é uma subfunção de produção. As relações entre produção e insumos X_1, $X_2, \ldots, X_l, X_{l+1}, \ldots, X_k$ podem ser estimadas por meio da subfunção . Dessa forma, a função de produção a ser estimada consiste em

$$Y_i = g\ (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{il}, X_{i,l+1}, \ldots, X_{ik}) \qquad (37)$$

Os fatores de produção a serem considerados são mão-de-obra, dois insumos energéticos, derivados de petróleo e energia elétrica, e um agregado de insumos considerados não-energéticos[2], formado por despesas com outros fatores como fertilizantes, pesticidas e materiais em geral. As variáveis foram assim definidas: Y = valor da produção por propriedade, em US$/ano; X_1 = quantidade de mão-de-obra (MO)

[2] Os elementos desse agregado são considerados não-energéticos no sentido de energia direta consumida no processo de produção.

utilizada na propriedade por ano, em equivalente-homem; X_2 =. quantidade de energia de derivados de petróleo (DP) utilizada (diesel mais gasolina), medida em KgEP (quilograma equivalente de petróleo)/ ano; X_3 = quantidade de energia elétrica (EE) utilizada, medida em KgEP/ano; X_4 = valor dos insumos não-energéticos (NE) utilizados, em US$/ano.

A função (37) passa a ser[3]

$$Y_i = g\ (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4}), \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots,N \qquad (38)$$

Pressupondo-se que a função *Translog (transcendental logarítmica)*, proposta por Christensen, Jorgenson e Lau (1971), constitua uma representação da função de produção[4] verdadeira, a função (38) será estimada por meio da seguinte equação:

$$\ln Y_i = \ln \alpha_0 + \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \ln X_{ji} + 1/2 \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} \beta_{jk} \ln X_{ji} \ln X_{ki} + \varepsilon_i \qquad (39)$$

em que $i = 1,2,3,\ldots\ldots,N$ são propriedades rurais X_{jk}, $j,k = 1,2,3,4$ são os fatores de produção; Y é o valor da produção; e ε_i é um erro aleatório pressuposto normal, independente e de variância constante.

Em (39), a igualdade $\beta_{jk} = \beta_{kj}$, $j,k = 1,2,3,4$ é condição imposta pelo teorema de Young, referente à igualdade das derivadas cruzadas de segunda ordem. Para que a produção ocorra sob retornos constantes à escala, as seguintes restrições devem ser satisfeitas:

[3] É importante lembrar que a especificação de funções de produção envolvendo valores monetários requer a pressuposição básica de que produtos e fatores de produção são comercializados em mercados competitivos e, por isso, os preços são constantes.

[4] A questão da forma funcional translog pode ser vista de duas maneiras. A primeira considera a função de produção *translog* como originalmente proposta, ou seja, como uma aproximação de segunda ordem em torno de um ponto por meio de série de Taylor para uma função de produção qualquer. A segunda considera a função como a verdadeira função de produção. A escolha de um ou de outro enfoque apresenta implicações na estimação e nos testes de hipóteses (Burges, 1975).

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} \beta_{jk} = \sum_{k=1}^{4} \beta_{kj} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} \beta_{jk} = 0 \qquad (40)$$

Para que a tecnologia possa ser representada por uma função tipo Cobb-Douglas, a condição $\beta_{jk} = 0$, $j, k = 1,2,3,4$tem que ser observada.

Obtidas as estimativas dos parâmetros da função de produção (39), serão calculadas as diferentes elasticidades de substituição. Primeiro, calculam-se as ESAs, com base na equação (18). A partir dessa, calculam-se as ESMs, usando-se as equações (26) e (27). Por fim, são calculadas as ESSs, com base na equação (34). Todas essas elasticidades foram calculadas para o ponto médio da amostra.

Os dados utilizados são provenientes de 1041 propriedades rurais eletrificadas do Estado de Minas Gerais, coletados, em 1991, por meio de entrevista direta com os proprietários, usando-se questionário previamente testado (CEMIG/UFV, 1986).

A equação (39) será estimada pelo método de *mínimos quadrados ordinários*. A análise do comportamento da função será feita com base em vários elementos. Monotonicidade exige que os produtos marginais estimados sejam positivos. Além disso, as derivadas de segunda ordem devem ser negativas, o que indica que os produtos marginais são decrescentes. Para que a função de produção satisfaça à propriedade de quasi-concavidade, é necessário que a matriz Hessiana orlada seja negativa semidefinida. Essa propriedade é denominada de condição de estabilidade da função de produção. A matriz Hessiana orlada será negativa semidefinida se os valores dos determinantes menores sucessivos alternarem em sinal, sendo o primeiro negativo. Essas condições podem ser constatadas em cada observação. No presente, como se trata de dados de seção-cruzada, elas serão checadas no ponto médio da amostra.

A Tabela 1 mostra os parâmetros da função de produção estimada juntamente com os respectivos desvios-padrão e teste t. O valor do R^2 (ajustado para graus de liberdade) foi de 0,77, indicando bom ajustamento da função aos dados. Dos 15 parâmetros estimados, apenas quatro não foram significativos. Baseando-se na condição t > 1 como evidência não muito precisa de significância estatística, tem-se que apenas três coeficientes não são significativos. O teste de Razão de Verossimilhança indicou rejeição da hipótese de tecnologia Cobb-Douglas, a favor da *translog*. Da mesma forma, a hipótese de retornos constantes à escala foi rejeitada. Há evidências de retornos decrescentes à escala, com uma elasticidade de escala estimada em 0,95.

Tabela 1- Parâmetros Estimados da Função de Produção *Translog*, Minas Gerais, 1991

Variável	Parâmetro Estimado	Desvio-padrão	Significância Teste " t "
Intercepto	4,8533	0,2208	21,9805***
$\ln X_1$	0,1059	0,0536	1,9757**
$\ln X_2$	0,2122	0,0418	5,0766***
$\ln X_3$	0,0949	0,0366	2,5929***
$\ln X_4$	0,1140	0,0519	2,1965**
$(\ln X_1)^2$	0,0739	0,0143	5,1678***
$(\ln X_2)^2$	0,0285	0,0071	4,0141***
$(\ln X_3)^2$	0,0542	0,0067	8,0896***
$(\ln X_4)^2$	0,0261	0,0060	4,3500***
$\ln X_1 \ln X_2$	-0,0332	0,0068	4,8823***
$\ln X_1 \ln X_3$	-0,0040	0,0085	0,4706NS
$\ln X_1 \ln X_4$	0,0004	0,0087	0,0460NS
$\ln X_2 \ln X_3$	-0,0089	0,0062	1,4355NS
$\ln X_2 \ln X_4$	0,0008	0,0023	0,3478NS
$\ln X_3 \ln X_4$	-0,0166	0,0075	2,2133**

R^2 = 0,7729 F = 46,07*** N = 1041

*** Significativo a 1%; ** Significativo a 5%; NS = Não-Significativo

A interpretação dos coeficientes estimados (sinal e magnitude) no modelo *translog* e em outras funções que envolvem termos logarítmicos multiplicativos é difícil, porque depende das unidades de medida das variáveis envolvidas. Em muitos trabalhos, os autores mencionam que esses coeficientes não têm significado econômico, o que não é correto. Para se fazer a interpretação, têm-se que realizar transformações das unidades de medida. Por outro lado, as elasticidades são invariantes com relação às unidades de medida, razão por que são analisadas e interpretadas (Hunt e Lynk,1993; e Stern, 1995).

Todos os produtos marginais, estimados no ponto médio da amostra, foram positivos, o que indica que a função de produção satisfaz à condição de monotonicidade no ponto considerado. Da mesma forma, as derivadas parciais de segunda ordem da função de produção foram todas negativas. Os valores dos menores determinantes principais sucessivos, alternam em sinal, como exigido. Assim, pode-se pressupor que as condições de regularidade e estabilidade da função de produção estimada sejam satisfeitas, considerando-se o ponto médio da amostra.

Os resultados mostram bastante coerência entre as estimativas das diferentes medidas de substituição entre os fatores. Todas as elasticidades são positivas, o que indica que todos os pares de fatores são substitutos. As magnitudes são também semelhantes, o que indica coerência tanto na natureza quanto no grau de substituição entre os fatores.

Porém, algumas diferenças importantes podem ser observadas. Na Tabela 2, têm-se as ESAs. Essas elasticidades são simétricas e do tipo " um fator-um preço", ou seja, mostram a mudança percentual na quantidade de um fator resultante da mudança percentual no preço do outro fator. É uma medida de como um fator se ajusta a mudanças no preço do outro fator. A elasticidade de substituição de derivados de petróleo por energia elétrica (ou vice-versa) é 0,317. Um aumento de 10% no preço de derivados de petróleo causa aumento de 3,17% na quantidade usada de energia elétrica. Da mesma forma, devido à simetria, um aumento de 10% no preço de energia elétrica causa aumento de 3,17% na quantidade usada de derivados de petróleo. As outras elasticidades são todas maiores que a unidade, o que indica certa facilidade de substituição de fatores no processo produtivo das propriedades rurais eletrificadas do Estado de Minas Gerais. Existem melhores possibilidades de substituição entre mão-de-obra e derivados de petróleo, em razão, certamente, da mecanização, cujos equipamentos usam quase que exclusivamente óleo diesel e têm grande capacidade de substituir mão-de-obra.

A baixa elasticidade de substituição entre derivados de petróleo e energia elétrica mostra que o sistema de produção das propriedades rurais é muito dependente de petróleo e que muitas operações não apresentam condições de usarem eletricidade como fonte energética. Como exemplo, podem-se citar o preparo do solo, os tratos culturais em geral e o transporte. As operações que podem usar eletricidade como fonte de energia, como, por exemplo, irrigação, manejo do rebanho, secagem, beneficiamento, processamento, industrialização e armazenamento são, ainda pouco expressivas.

A análise das ESMs (Tabela 3) mostra, basicamente, as mesmas características de substituição entre os fatores. Contudo, o significado e a assimetria das ESM fornecem informações importantes. Por ser uma elasticidade tipo "dois fatores-um preço", a ESM mostra ajustamentos na razão de fatores, dada a mudança no preço de um fator. Para ilustrar, considere a elasticidade de substituição de derivados de petróleo por energia elétrica, $\sigma^{M}_{PE} = 1{,}119$ e a elasticidade de substituição de energia elétrica por derivados de petróleo, $\sigma^{M}_{EP} = 1{,}375$. Tem-se que um aumento de 10% no preço de energia elétrica causa um aumento de 11,19%, na razão DP/EE. Por outro lado, um aumento de 10% no preço de derivados de petróleo causa um aumento de 13,75% na razão EE/DP. A elasticidade é um pouco maior quando o preço do petróleo se ajusta. Dessa forma, políticas que visam estimular o uso de energia elétrica serão mais eficazes, se concentrarem nos preços dos derivados de petróleo, ou seja, aumento no preço do petróleo, por meio de taxação, por exemplo, será mais eficaz que diminuição do preço da energia elétrica, por subsídio ou outra forma qualquer.

Rochelle e Ferreira Filho (1999) estimaram elasticidades de substituição entre fatores usados na cotonicultura paulista e encontraram complementariedade entre mão-de-obra e operações com máquinas pela elasticidade de Allen-Uzawa. No entanto, pela elasticidade de Morishima, os mesmos fatores são substitutos, quando o preço de operações com máquinas varia, e complementares, quando o preço da mão-de-obra varia. As ESSs (Tabela 4) mostram a mudança percentual na razão de fatores, dada uma mudança percentual na relação de preços. Esta é uma medida tipo "dois fatores-dois preços" e é a que mais se aproxima da definição original de Hicks/Robinson. O valor $\sigma_{PE}^{S} = 1{,}243$, por exemplo, representa uma estimativa da elasticidade de substituição entre derivados de petróleo e energia elétrica e indica que, para uma mudança de 10% na relação de preços, a razão de fatores aumenta 12,43%.

Tabela 2 – Elasticidades Parciais de Substituição de *Allen* (ESA), Minas Gerais, 1991

Fatores	Mão-de-Obra X_1	Derivados de Petróleo X_2	Energia Elétrica X_3	Insumos X_4
X_1 – Mão-de-Obra	-3,341	2,044	1,351	1,132
X_2 – Derivados de Petróleo		-8,552	0,317	1,682
X_3 – Energia Elétrica			-7,297	1,543
X_4 - Insumos				-2,013

Tabela 3 – Elasticidades de Substituição de *Morishima* (ESM), Minas Gerais, 1991

Fatores	Mão-de-Obra X_1	Derivados de Petróleo X_2	Energia Elétrica X_3	Insumos X_4
X_1 – Mão-de-Obra	-	1,643	1,271	1,276
X_2 – Derivados de Petróleo	1,573	-	1,119	1,500
X_3 – Energia Elétrica	1,371	1,375	-	1,443
X_4 - Insumos	1,307	1,586	1,299	-

Tabela 4 – Elasticidades de Substituição de *McFadden* (ESS), Minas Gerais, 1991

Fatores	Mão-de-Obra X_1	Derivados de Petróleo X_2	Energia Elétrica X_3	Insumos X_4
X_1 - Mão-de-Obra	-	1,619	1,304	1,294
X_2 - Derivados de Petróleo		-	1,243	1,563
X_3 - Energia Elétrica			-	1,337
X_4 - Insumos				-

4. Conclusões

Este trabalho teve o objetivo principal de apresentar uma revisão de diferentes definições de *elasticidade de substituição.* Mostrou-se que o conceito evoluiu ao longo do tempo e que as dificuldades na operacionalização do conceito se referem ao caso de mais de dois fatores de produção.

As *elasticidades parciais de substituição de Allen (ESA),* apesar de serem as mais conhecidas e utilizadas, apresentam várias deficiências.

Mostrou-se que as ESAs não fornecem nenhuma informação além das elasticidades-preço da demanda compensada do fator. As *elasticidades de substituição de Morishima (ESM)* apresentam várias propriedades importantes, dentre elas a *assimetria*. As ESMs são mais adequadas para classificar fatores de produção em *complementares e substitutos*. *A elasticidade de substituição sombra (ESS)* é a única definição fiel do conceito original de elasticidade de substituição, segundo o qual a ES mede a variação percentual na relação de fatores dada uma variação percentual na relação de preços.

As estimativas das ESA, ESM e ESS, para medir a natureza e o grau de substitutibilidade entre energia elétrica e outros fatores de produção em propriedades rurais eletrificadas do Estado de Minas Gerais em 1991, foram bastante coerentes. Observou-se que todos os pares de fatores são substitutos e que as possibilidades de substituição de mão-de-obra e derivados de petróleo são maiores que as de energia elétrica e derivados de petróleo. A assimetria da ESM mostrou que ajustes nos preços dos derivados de petróleo causam maiores impactos do que ajustes nos preços da energia elétrica.

5. Bibliografia

ALLEN, R. G. D. **Mathematical Analysis for Economists**. London, Macmillan, 1938.

BINSWANGER, H. P. A cost function approach to the measurement of elasticities of factor demand and elasticities of substitution. **The American Journal of Agricultural Economics**, v.56, n.2, p.377-86, 1974.

BLACKORBY, C. e RUSSELL, R. R. The Morishima elasticity of substitution; symmetry, constancy, separability, and its relationship to the Hicks and Allen elasticities. **Review of Economic Studies**, v.48, p.147-158, 1981.

BLACKORBY, C. e RUSSELL, R. R. Will the real elasticity of substitution please stand up? (A comparison of the Allen/Uzawa and Morishima elasticities). **The American Economic Review,** v.79, n.4, p.882-888,1989.

BURGES, D. F. Duality theory and pitfalls in the specification of technologies. **Journal of Econometrics** v.3, p.105-121, 1975.

CEMIG/UFV. Projeto de monitoria e avaliação do programa CEMIG-RURAL: Perfil de Entrada. Belo-Horizonte,MG.(Vol. I e II), 1986.

CHAMBERS, R. G. **Applied production analysis - A dual approach**. New York, Cambridge University Press, 1988. 331p.

CHRISTENSEN, L. R.; JORGENSON, D.W. e LAU, L. J. Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function. **Econometrica**, v.39, n.4, p.255-256, 1971.

FUSS, M., McFADDEN, D. e MUNDLAK, Y. "A survey of functional forms in the economic analysis of production," In: FUSS, M. & McFADDEN, D. (eds.): **Production Economics: A Dual Approach to Theory and Application**. Amsterdam, North-Holand, 1978, pp.219-268.

HICKS, J. R. **The Theory of Wages**. London, Macmillan, 1932.

HICKS, J. R. Notes on the elasticity of substitution: A note on Mr Kahn´s paper.**Review of Economic Studies**, v.1, p.78-80, 1933

HICKS, J. R. e ALLEN, R. G. D. A reconsideration of the theory of wage. **Economica**, v. 1, n. 1, p. 52-76 e p. 196-216, 1934.

HUNT, L. C. e LYNK, E. L. The interpretation of coefficients in multiplicative logarithmic functions. **Applied Economics**, v.25, p.735-738, 1993.

KAHN, R. F. Notes on the elasticity of substitution: The elasticity of substitution and the relative share of a factor. **Review of Economic Studies**, v.1, p.72-78, 1933.

KAHN, R. F. The elasticity of substitution: Two applications of the concept. **Economic Journal**, v.46, p.242-245, 1935.

KOIZUMI, T. A further note on definition of elasticity of substitution in the many input case. **Metroeconomica,** v.28, n.1-2-3, p.152-155, 1976.

KUGA, K. e MUROTA, T. A note on definitions of elasticity of substitution in many input case. **Metroeconomica**, v.24,n.3, p.285-290, 1972.

LERNER, A. P. Notes on the elasticity of substitution: The diagramatical representation. **Review of Economic Studies**, v.1, p.68-71, 1933.

LERNER, A. P. Notes on the elasticity of substitution. **Review of Economic Studies**, v.1, p.147-148, 1934.

LERNER, A. P. The question of symmetry. **Review of Economic Studies**, v.3, p.150-151, 1936.

MACHLUP, Fritz. The commonsense of the elasticity of substitution. **Review of Economic Studies,** v.2, n. 3, p.202-213, 1935.

McFADDEN, D. Further results on C.E.S. production functions. **Review of Economic Studies**, v.30, p.73-78, 1963.

MEADE, J. E. The elasticity of substitution and the incidence of an imperial house duty. **Review of Economic Studies**, v.1, p.149-152, 1934a.

MEADE, J. E. The elasticity of substitution and the elasticity of demand for one factor of production. **Review of Economic Studies**, v.1, p.152-153, 1934b.

MORISHIMA, M. A few suggestions on the theory of elasticity. **Keizai Hyoron**, v.16, p.145-150, 1967.

MORRISSETT, I. Some recent uses of elasticity of substitution – A survey.**Econometrica,** v.21, n.1, p.41-62, 1953.

MUNDLAK, Y. Elasticities of substitution and the theory of derived demand. **Review of Economic Studies,** v.35, n.102, p.225-236, 1968.

PIGOU, A. C. The elasticity of substitution. **Economic Journal**, v.44, p.232-241, 1934.

ROBINSON, Joan. **The Economics of Imperfect Competition**. London, Macmillan, 1933.

ROCHELLE, T. C. P. e FERREIRA FILHO, J. B. S. *Função de custo* translog *e o mercado de fatores para o algodão no Estado de São Paulo: O caso da DIRA de Campinas.* ***Revista de Economia e Sociologia Rural,*** *v.37, n.2, p.77-95, 1999.*

STERN, D. I. Measurement unit invariant coefficients in multiplicative-logarithmic functions. **Applied Economics**, v.27, p.451-454, 1995.

SWEEZY, P. M. Notes on the elasticity of substitution: A note on relative shares.**Review of Economic Studies**, v.1, p.67-68, 1933.

TARSHIS, Lorie. Notes on the elasticity of substitution. **Review of Economic Studies**, v.1, p.144-147, 1934.

THOMPSON, P. e TAYLOR, T. G. The capital-energy substitutability debate: A new look. **The Review of Economics and Statistics**, Notes, 1995.

UZAWA, H. Production functions with constant elaticities of substitution. **Review of Economic Studies**, v.29, n.81, p.291-299, 1962.