A forma flexível de Fourier, a estimação de elasticidades e vieses tecnológicos para a agricultura brasileira[1]

João Lopes de Albuquerque Montenegro[2]
Geraldo da Silva e Souza[3]

RESUMO - Ajusta-se um sistema de dispêndios do tipo flexível de Fourier aos dados agregados da agricultura brasileira no período de 1950 a 1980. Estimam-se elasticidades de substituição, elasticidades de preços e vieses tecnológicos. O modelo utilizado conduz à rejeição da hipótese de uma tecnologia de produção do tipo Translog. Todas as elasticidades variam significativamente no período, e a magnitude dos vieses tecnológicos indicam uma economia essencialmente neutra em termos de trabalho e terra, e intensiva no uso de fertilizantes e máquinas.

Termos para indexação: viés tecnológico, Teoria da Dualidade, formas flexíveis.

The Fourier flexible form and the estimation of elasticities and tecnological biases for the Brazilian agriculture

ABSTRACT - An expenditure system of the flexible Fourier type is adjusted to aggregated data of the Brazilian agriculture in the period 1950-1980.

---

[1] Recebido em 18.04.89
Aceito para publicação em 30.08.89
Pesquisa parcialmente financiada pelo CNPq.
[2] Professor-Titular do Departamento de Estatística da Universidade de Brasília.
[3] Professor-Adjunto do Departamento de Estatística da Universidade de Brasília e Pesquisador da EMBRAPA.

Substitution and price elasticities as well as technological biases are estimated. The model used leads to the rejection of a Translog production technology. All elasticities vary significantly over the period and the magnitude of the tecnological biases indicate a neutral economy in labor and land, and intensive in machinery and fertilizers.
Index terms: tecnological bias, Duality Theory, flxible forms.

INTRODUÇÃO

Este trabalho reanalisa os dados de Santos (1986), no contexto do estudo de inovações tecnológicas induzidas. Melhora a metodologia de estimação da participação ("share") dos fatores de produção, de estimação das elasticidades de substituição e preço, e da estimação de vieses tecnológicos para a agricultura brasileira no período 1950-1980.

A técnica utilizada emprega uma Forma Flexível de Fourier (FFF) para a função de custos. A motivação para introduzir as FFF está no seu potencial de eliminar as hipóteses aumentadas, do tipo paramétrico, em geral bastante restritivas. As conclusões resultantes da inferência estatística paramétrica estão limitadas pela especificação do modelo (Chalfant & Gallant 1985, Gallant 1981 e 1982, White 1980).

A utilização das formas flexíveis clássicas, como o Translog e outras famílias paramétricas, tais como a Cobb-Douglas, pode levar a sérios vieses nos estimadores de elasticidades e em certos testes estatísticos. Um teste pode rejeitar uma hipótese nula com uma probabilidade que excede em muito sua probabilidade nominal de rejeição (Gallant 1981). Uma maneira de interpretar o trabalho com as formas flexíveis de Fourier é de vê-lo como o uso de famílias semi paramétricas numa tentativa de reduzir dois tipos de vieses estatísticos: viés do estimador e probabilidade de rejeição excessiva.

O estudo de vieses em mudanças tecnológicas na agricultura é importante na medida em que fornece subsídios para a formulação de uma política agrícola que favoreça a melhor utilização dos seus fatores de produção disponíveis, ou, ainda, uma melhor utilização destes sob outros critérios, como, por exemplo, o social.

O conceito de neutralidade de Hicks modificado (Binswanger 1974) permite o cálculo de vieses de mudanças tecnológicas para N fatores de produção. Este conceito foi utilizado por Santos (1986), no contexto de uma função de custos Translog, para analisar os vieses de mudanças tecnológicas na agricultura brasileira. A introdução de uma função de custo do tipo FFF e das correspondentes transformações que se fazem necessárias sobre as variáveis exógenas de modo a que estas estejam contidas no intervalo (a,b), onde $0 < a < b < 2\pi$, exige o desenvolvimento de equações específicas para o cálculo da evolução da participação ("share") dos fatores de produção, quando os preços relativos são mantidos constantes. Tais equações levam a taxas de participação substancialmente distintas das obtidas em Santos (1986).

METODOLOGIA

As formas funcionais flexíveis

A Teoria da Firma caracteriza a função de custo $C(p_1, p_2, ..., p_N, u, t)$ no tempo t como o custo mínimo necessário para a obtenção do nível de produto u, quando o preço do i-ésimo fator de produção é p_i e seu nível de utilização q_i, i = 1, 2, ..., N. A introdução de t como variável modela mudanças tecnológicas. Se a função de custos é homogênea de grau 1 nos preços dos fatores de produção, pelo lema de Shephard

$$q_i = \frac{\partial C}{\partial p_i}(p_1, p_2, \ldots, p_N, u, t).$$

Seja λ um parâmetro de escala, e $a_1, a_2, ..., a_N + 2$, parâmetros de localização. Defina

$$g(x) = \ln C\left(\frac{e^{\frac{x_1}{\lambda}}}{a_1}, \frac{e^{\frac{x_2}{\lambda}}}{a_2}, \ldots, \frac{e^{\frac{x_{N+2}}{\lambda}}}{a_{N+2}}\right)$$

e, ainda, $x_1 = \lambda(\ln p_i + \text{in } a_i)$, i = 1,2, ..., N; $x_{N+1} = \lambda(\ln u + \ln a_{N+1})$ e $x_{N+2} = \lambda(\ln t + \ln a_{N+2})$. A tecnologia homogênea acarreta homogeneidade linear para g(x) nas suas N primeiras componentes (Gallant 1982), e as equações de demanda são equivalentes ao sistema de dispêndios

$$s_i = \frac{\partial}{\partial x_i} g(x), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

onde $s_i = p_i q_i / \Sigma^N_{i=1} p_i q_i$ é a participação relativa do fator i no custo total.

Uma forma funcional flexível para g(x) especifica uma família paramétrica $g(x|\theta)$, que representa um conjunto mínimo de restrições a priori a serem impostas sobre g(x). A idéia básica é utilizar $g(x|\theta)$ no lugar de g(x) no ajuste econométrico de sistemas de dispêndios.

A maioria das formas funcionais flexíveis consideradas na literatura econométrica são formas de segunda ordem (ou flexíveis de Diewert). Tecnicamente, isto significa que se g(x) vai ser aproximada por $g(x|\theta)$, então em qualquer ponto x^0 existe uma escolha correspondente de parâmetros θ^0, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{| g(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h} \mid \theta^0) |}{\| \mathbf{h} \|^2} = 0.$$

Esta propriedade, por exemplo, é exibida pelas formas funcionais do Translog, generalizada de Leontief, Box-Cox e as formas de Laurent. Estas formas possuem um número suficiente de parâmetros para permitir que sua matriz de elasticidade de substituição assuma qualquer valor em qualquer ponto no espaço das observações. É preciso, no entanto, ter cuidado para não concluir que propriedades estatísticas de interesse decorram desta generalização de caráter econômico.

Assim sendo, não é possível escolher um ponto qualquer no espaço de observações – como a sua média, por exemplo – e afirmar que a matriz de elasticidades vai ser estimada consistentemente neste ponto, independentemente do verdadeiro estado da natureza (White 1980). A despeito do fato de que o uso de formas funcionais flexíveis de segunda ordem representam uma melhor prática estatística com relação às formas que a precederam, não podemos afirmar que tal abordagem seja robusta (insensível) relativamente à hipótese aumentada, induzida pela especificação do modelo numa forma paramétrica particular.

A forma Translog

A forma "Transcedental Logarithmic Cost Function", ou a Função de Custos Translog é uma das formas funcionais flexíveis mais utilizadas. A função de custo Translog pode ser escrita como:

$$g(\mathbf{x}) = \ln u_{00} + \sum_i b_i x_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} x_i x_j.$$

Até o primeiro somatório temos uma função do tipo Cobb-Douglas e, portanto, os termos introduzidos pelo somatório duplo representam adições que permitem às suas elasticidades de substituição e de preços assumirem valores diferentes da unidade, ou, ainda, emprestam a função de custos aumentada a propriedade de ser flexível de Diwert, conforme definição acima.

Em sua forma vetorial, temos que

$$g(\mathbf{x}) = u_0 + \mathbf{b}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x}.$$

onde $u_0 = \ln u_{00}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{N+2})'$ e $\mathbf{C} = C_{ij}$.

As formas flexíveis de Sobolev

Será possível testar, por exemplo, a hipótese de que uma tecnologia de produção seja homotética sem ter que assumir, em adição, que todas as tecnologias de produção são da forma Box-Cox (Berndt & Khaled 1979)? Ou ainda, sob as mesmas condições, será possível estimar consistentemente uma elasticidade de substituição ou de preços? Uma metodologia que consegue atingir tais objetivos retendo características paramétricas é chamada uma metodologia semi-não paramétrica (Elbadawi et al. 1983).

Para dotar um método essencialmente paramétrico com a propriedade semi-não paramétrica de robustez relativamente à hipótese aumentada, induzida pela especificação do modelo, é preciso alguma regra para ampliar o modelo paramétrico à medida que o tamanho da amostra aumenta. Uma maneira natural de se fazer isto seria usar os termos iniciais de uma expansão em séries,

$$g_K(\mathbf{x} \mid \theta) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j \phi_j(\mathbf{x}),$$

juntamente com alguma regra para permitir K crescer com o tamanho da amostra (ou seja, uma parametrização de dimensão infinita). Na prática, a maioria das formas funcionais flexíveis são os termos iniciais de uma expansão em série, e é este fato que leva a intuição de que o seu uso deve representar uma melhora na prática estatística. Observe-se que uma expansão em séries $g_K(x|\theta)$ pode aproximar, sob certas condições, qualquer elemento g(x) numa certa classe de funções. Para tornar tal argumento matematicamente preciso é necessário uma definição da expressão "aproximar". Caracterizar este conceito significa definir uma norma $\|e\|$ adequada para a mensuração do erro de aproximação $e(x) = g(x) - g_K(x|\theta)$.

Para os casos da demanda do consumidor e da firma, a norma de Sobolev, explicada adiante, é a norma de importância. Cunhou-se o termo "flexível de Sobolev" para represntar expansões em séries que são densas com relação à norma de Sobolev (Gallant 1981 e 1982). Uma forma que é flexível de Sobolev pode estimar elasticidades consistentemente (Elbadawi et al. 1983), não irá rejeitar espuriamente (Gallant 1982), e terá vieses de previsão despezáveis (Gallant 1981). Obviamente, existem condições de regularidade que limitam o escopo destas afirmações, mas, em geral, a forma flexível de Sobolev dota uma metodologia estatística essencialmente paramétrica com propriedades não-paramétricas. Até esta data, a forma flexível de Fourier é a única forma flexível que foi demonstrada como sendo flxível de Sobolev (Gallant 1981 e 1982).

A forma flexível de Fourier

Para uma firma, com uma tecnologia homogênea g(x) escolha λ e a_1, a_2, ..., a_{N+2} de tal sorte que $0 < a < x_i < b < 2\pi$, $\forall$ i. Uma elasticidade cruzada de substituição em x^0 é calculada por (Gallant 1982)

$$\sigma(g) = 1 + \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j} \Big/ \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}$$

Pode-se ver, desta expressão, que não é suficiente que $g_K(x \mid \theta)$ aproxime g(x). Precisamos uma medida do erro de aproximação e(x), que leve também em consideração a aproximação das derivadas. Esta medida é a norma de Sobolev.

Para definir a norma de Sobolev, considere primeiramente o caso univariado. Seja $e(x) = g(x) - g_K(x \mid \theta)$ o êrro ao aproximar g por g_K. Suponha g m vezes continuamente diferenciável. Para $1 \leqslant p < \infty$, a norma de Sobolev é definida por

$$\|e\|_{m,p,f} = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \int_a^b \left| \frac{d^i e(x)}{dx^i} \right|^p f(x) dx \right\}^{1/p}$$

onde f(x) é uma função de densidade de probabilidade, que teoricamente define o mecanismo gerador do processo iid associado à variável exógena x.

Para $p = \infty$ a norma de Sobolev é

$$\|e\|_{m,\infty,f} = \sum_{i=0}^{m} \max_{x \in \mathcal{X}} \left| \frac{d^i}{dx^i} e(x) \right|$$

onde H é o espaço de x.

Portanto, a norma de Sobolev é uma medida de distância que leva em consideração as derivadas. Se $g_K(x|\theta)$ não for uma boa aproximação de g(x), ou de qualquer uma de suas derivadas até a ordem m, a norma de Sobolev revelará um erro de aproximação grande.

Seja k um vetor de componentes inteiras, de dimensão N + 2, denominado multi-índice, cujo comprimento é dado por

$$|\mathbf{k}| = \sum_{i=1}^{N+2} |k_i|$$

Definindo-se λ como um multi-índice de componentes não negativas, a diferenciação parcial de uma função e(x) de ordem $|\lambda|$ é representada por

$$D^{\lambda}e(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}\ldots\partial x_{N+2}^{\lambda_{N+2}}}e(\mathbf{x}) .$$

Assume-se que $D^{\lambda}e(x)$ é uma função contínua de x sempre que esta notação for empregada.

No caso multivariado, para $1 \leq p < \infty$ a norma de Sobolev de e(x) com respeito à função de densidade de probabilidades f(x) é

$$||e||_{m,p,f} = \left(\sum_{|\lambda|\leq m}\int_{\mathcal{H}} |D^{\lambda}e(\mathbf{x})|^{p} f(\mathbf{x})dx\right)^{1/p}$$

Para $p = \infty$, tem-se

$$||e||_{m,\infty,f} = \sum_{|\lambda|\leq m}\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{H}}|D^{\lambda}e(\mathbf{x})|$$

onde o fecho de $H \subset (0,2\pi)^N$.

É importante observar, que qualquer expansão em série

$$g_K(\mathbf{x} \mid \theta) = \sum_{j=1}^{K}\theta_j\phi_j(\mathbf{x}),$$

que aproxime g(x), no conceito de norma de Sobolev, terá, necessariamente, a propriedade de que a elasticidade $\sigma(g_K)$ aproximará uniformemente $\sigma(g)$. A expansão em série de Fourier apresenta esta propriedade. Dada qualquer função f(x) m vezes continuamente diferenciável, é possível escolher θ_j tal que $\lim_{K \to \infty} \|g - g_K\|_{m,p,f} = 0$, $\forall\, p \in [1, +\infty]$ (Edmunds & Moscatelli 1977).

Muito embora estes coeficientes θ_j possa existir, o que não é óbvio é se os coeficientes θ_j estimados utilizando algum procedimento estatístico terão propriedades semelhantes. Esta questão foi abordaa por Elbadawi et al. (1983) e o resultado principal deste estudo é que para qualquer dos métodos clássicos de estimação, i.e., mínimos quadrados, máxima verossimilhança, mínimos quadrados em dois ou três estágios etc., os estimadores obtidos, i.e., $D^\lambda g_K(x|\theta)$, são consistentes quase certamente para g e suas derivadas, uniformemente no espaço das variáveis exógenas. Estudos mais recentes (Souza 1988 e Andrews 1988) indicam também normalidade assintótica. Tais conclusões estendem-se às elasticidades.

Quando aproximando uma função não-periódica g(x) por uma expansão em série de Fourier, é comum adicionarmos um termo linear e um termo quadrático. Isto reduz substancialmente em aplicações a ordem da série a ser utilizada. Com esta modificação, uma expansão univariada em série de Fourier pode ser escrita como

$$g_K(x \mid \theta) = a + bx + \frac{1}{2}cx^2 + 2\sum_{j=1}^{J}[u_j \cos(jx) - v_j \sin(jx)],$$

onde o vetor de parâmetros $\theta = (a, b, c, u_1, v_1, ..., u_J, v_J)'$ tem comprimento $K = 3 + 2J$. Suponha que as observações sigam o modelo $y_t = g(x_t) + e_t$, $t = 1, 2, ..., n$, onde y_t representa o logaritmo neperiano do custo por unidade de produção e que estimamos θ por mínimos quadrados, isto é, o parâmetro θ é estimado por θ, que minimiza

$$S_n(\theta) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}[y_t - g_K(x_t \mid \hat{\theta})]^2.$$

Aqui, dois pontos merecem consideração imediata: A escolha do tamanho do vetor θ e a redução de x a (a,b). A relação $K = \sqrt{n}$ pode ser usada como uma primeira aproximação para determinar o número de componentes em θ (Gallant 1984). Sugere-se também o uso de testes F de especificação. Adicionam-se mais termos à série de Fourier, quando tais testes rejeitam a especificação corrente (ou reduz-se o número de termos se a abordagem reversa for adotada).

Por outro lado, as variáveis exógenas precisam ser transformadas, porque uma aproximação de g(x) por série de Fourier, numa vizinhança de um ponto de descontinuidade, oscila enormemente, provocando o fenômeno de Gibbs (Gallant 1984). Por exemplo, do ponto de vista de uma série de Fourier, se g(x) é real e não-periódica, os pontos $x = 0$ e $x = 2\pi$ são de descontinuidades. A idéia, portanto, é escolher a e b de forma a manter as oscilações indesejadas nos intervalos (0, a] e [b, 2π).

A transição de uma série de Fourier univariada para uma série multivariada é feita reduzindo x a uma quantidade univariada z, através da soma ponderada $z = k'_{\alpha}x = \Sigma^{N}_{i=1} k_{i\alpha}x_i$. Utiliza-se z como o argumento deuma série de Fourier univariada e soma-se sobre uma seqüência apropriada de vetores $\{k_{\alpha}\}$ com componentes inteiras; i.e.,

$$g(\mathbf{x} \mid \theta) = \sum_{\alpha=1}^{A} \mu_{\alpha}(\mathbf{k}'_{\alpha}\mathbf{x})$$

$$\mu_{\alpha}(z) = \mu_{0\alpha} + 2\sum_{j=1}^{J}[u_{j\alpha}\cos(jz) - v_{j\alpha}\sin(jz)].$$

Se adicionarmos um termo linear e um quadrático a $\mu_{\alpha}(z)$, obtém-se a Forma Flexível de Fourier,

$$g_K(\mathbf{x} \mid \theta) = u_0 + \mathbf{b}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'C\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^{A}\left\{u_{0\alpha} + 2\sum_{j=1}^{J}[u_{j\alpha}\cos(j\mathbf{k}'_{\alpha}\mathbf{x}) - v_{j\alpha}\sin(j\mathbf{k}'_{\alpha}\mathbf{x})]\right\}$$

A regra de formação da seqüência $\{k_{\alpha}\}$ para sistemas de dispêndio é dada em Monahan (1981).

Podemos observar, nesta última expressão, que a sua primeira parte corresponde à forma Translog apresentada anteriomente. A segunda parte, dada pelo somatório de $\alpha = 1$ até A, representa adições à forma Translog, permitindo que esta seja densa sob a norma de Sobolev e, portanto, que exiba as propriedades semi-não-paramétricas desejadas.

Vieses em mudanças tecnológicas

De conformidade com a definição de Hicks, uma mudança tecnológica é dita neutra, economizadora de trabalho, ou intensiva em trabalho se, a uma taxa constante de capital-trabalho, a sua taxa marginal de substituição permanece constante, aumenta ou decresce.

O conceito de Hicks é usado de uma maneira modificada em Binswanger (1974), levando a definição de vieses B_i em termos de participação dos fatores de produção, i.e.,

$$B_i = \frac{ds_i^*}{dt}\left(\frac{1}{s_i}\right)$$

Nesta expressão s_i é a participação do fator i, e a notação ds* / dt indica que os preços relativos são mantidos constantes na evolução da "share". A mudança tecnológica é economizadora do fator i no ponto t se $B_i < 0$, neutra se $B_i = 0$ e intensiva em i se $B_i > 0$.

A condição de preços relativos constantes, necessária para calcular ds_i/dt, pode ser expressa por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_i(t)}{p_j(t)}\right) = 0 \quad , \quad i \neq j$$

i.e.,

$$\frac{p_i'(t)p_j(t) - p_i(t)p_j'(t)}{p_j^2(t)} = 0 \quad , \quad \forall t$$

ou ainda

$$\frac{p_i'(t)}{p_i(t)} = \frac{p_j'(t)}{p_j(t)} \quad , \quad \forall t .$$

Como

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \lambda \frac{p_j'(t)}{p_j(t)} ,$$

das duas últimas expressões segue que

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} = v(t) \quad , \quad i,j = 1,2,\ldots,N.$$

Derivando s_i com relação ao tempo obtém-se

$$\frac{ds_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial s_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial s_i}{\partial x_{N+1}}\frac{dx_{N+1}}{dt} + \frac{\partial s_i}{\partial x_{N+2}}\frac{dx_{N+2}}{dt}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{ds_i^*}{dt} &= v(t)\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_i}{\partial x_{N+1}}\frac{dx_{N+1}}{dt} + \frac{\partial s_i}{\partial x_{N+2}}\frac{dx_{N+2}}{dt} \\ &= \frac{\partial s_i}{\partial x_{N+1}}\frac{dx_{N+1}}{dt} + \frac{\partial s_i}{\partial x_{N+2}}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\end{aligned}$$

uma vez que $\Sigma^N{}_{j=1} \partial s_i/\partial x_j = 0$ devido a propriedade de homogeneidade linear.

O CASO DA AGRICULTURA BRASILEIRA

A função de custo da forma flexível de Fourier

A equação de Custo FFF que utilizamos tem a forma seguinte:

$$\begin{aligned}\ln C = g_K(\mathbf{x}|\theta) = u_0 &+ \mathbf{b}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'C\mathbf{x} \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{20} \{u_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x}) - v_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x})\}\end{aligned}$$

com

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_7)'$

$x = (x_T, x_L, x_M, x_F, x_{OD}, x_{N+1}, x_{N+2})'$

onde o subíndice T representa terra, L representa trabalho, M representa máquinas, F representa fertilizantes e OD representa outras despesas. Esta classificação dos fatores de produção foi introduzida por Griliches (1958) e

utilizada em Binswanger (1974) e Santos (1986). As variáveis x_{N+1} e S_{N+2} correspondem às transformações do produto e do tempo. Como indicador do produto, usaremos o Produto Interno Líquido Agrícola (PIL).
A matriz K_1, com os primeiros dez multi-índices, é dada por

$$
\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

e a matriz K_2 dos dez últimos multi-índices, é dada por

$$
\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

A matriz K de multi-índices é dada pela concatenação $K = [K1\ K_2]$, onde cada coluna corresponde a um multi-índice $k\alpha$. Tal escolha representa contrastes de interesse entre os fatores de produção tal como sugerido em Gallant (1982) e foi limitada pela disponibilidade do número de observações, por testes de especificação e pelo número de condição ("condition number") da matriz do delineamento. Veja Souza (1988), Andrews (1988) e Eastwood & Gallant (1987) para maiores detalhes sobre a escolha do número de multi-índices.

Para que as condições de simetria e homogeneidade linear sejam válidas, as seguintes restrições foram impostas à parte Translog.

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= C_{ji} \;, \quad \forall i, j \;, \quad i \neq j \;, \\
\sum_{i=1}^{5} b_i &= 1 \;, \\
\sum_{j=1}^{5} C_{ij} &= 0 \;, \quad i = 1, 2, \ldots, 5 \;.
\end{aligned}
$$

Observe-se que a FFF aqui utilizada difere um pouco da usada por Gallant (1982). Seguiu-se a sugestão oferecida em Gallant (1987), de que desvios do Translog devem ser necessariamente do tipo Fourier. Essa especificação permite o teste do Translog, com suas restrições usuais, via um teste F, uma vez que o Translog, neste caso, define uma hipótese do tipo "nested".

As equações de participação

As equações de participação a serem estimadas, após introduzidas as condições de simetria e homogeneidade linear, são:

$$\begin{aligned}
s_T = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_T} = b_1 \quad & + \quad C_{11}[x_T - x_{OD}] + C_{12}[x_L - x_{OD}] \\
& + \quad C_{13}[x_M - x_{OD}] + C_{14}[x_F - x_{OD}] \\
& + \quad C_{16}x_{N+1} + C_{17}x_{N+2} \\
& + \quad \sum_{\alpha=1}^{20}[-u_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x}) + v_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x})]\, k_\alpha^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_L = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_L} = b_2 \quad & + \quad C_{12}[x_T - x_{OD}] + C_{22}[x_L - x_{OD}] \\
& + \quad C_{23}[x_M - x_{OD}] + C_{24}[x_F - x_{OD}] \\
& + \quad C_{26}x_{N+1} + C_{27}x_{N+2} \\
& + \quad \sum_{\alpha=1}^{20}[-u_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x}) + v_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x})]\, k_\alpha^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_M = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_M} = b_3 \quad & + \quad C_{13}[x_T - x_{OD}] + C_{23}[x_L - x_{OD}] \\
& + \quad C_{33}[x_M - x_{OD}] + C_{34}[x_F - x_{OD}] \\
& + \quad C_{36}x_{N+1} + C_{37}x_{N+2} \\
& + \quad \sum_{\alpha=1}^{20}[-u_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x}) + v_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x})]\, k_\alpha^{(3)} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_F = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_F} = b_4 \quad & + \quad C_{14}[x_T - x_{OD}] + C_{24}[x_L - x_{OD}] \\
& + \quad C_{34}[x_M - x_{OD}] + C_{44}[x_F - x_{OD}] \\
& + \quad C_{46}x_{N+1} + C_{47}x_{N+2} \\
& + \quad \sum_{\alpha=1}^{20}[-u_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x}) + v_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x})]\, k_\alpha^{(4)} \quad ,
\end{aligned}$$

onde $k_\alpha^{(i)}$ é o i-ésimo elemento do multi-índice k_α.

Como as participações dos fatores somam um, apenas quatro dentre as cinco equações de participação são independentes e, em virtude disto, podem ser estimadas simultaneamente. Portanto, a quinta participação, S_{OD}, pode ser calculada por diferença, ou seja,

$$S_{OD} = 1 - S_T - S_L - S_M - S_F,$$

é a participação das Outras Despesas.

A estimação dos parâmetros das equações de participação

A estimação dos parâmetros das equações de participação utilizou o Procedimento SYSNLIN (SAS 1985b) com o método de estimação de Zellner (1962) – "Seemingly Unrelated Regression (SUR)". A hipótese básica observacional, neste contexto, é a de que as participações s_i, i = 1, 2,..., N - 1 obedecem ao modelo estatístico

$$s_{it} = \frac{\partial g_K(\mathbf{x}_t|\theta)}{\partial x_i} + \epsilon_{it}, \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

onde

$$\begin{aligned} Cov(\epsilon_{it}, \epsilon_{jt'}) &= \sigma_{ij} \quad se \quad t = t' \quad e \quad i \neq j \\ Cov(\epsilon_{it}, \epsilon_{jt'}) &= 0 \quad se \quad t \neq t' \\ Var(\epsilon_{it}) &= \sigma_{ii} \\ \Sigma &= \sigma_{ij} \quad positiva\ semidefinida \end{aligned}$$

O método SUR, implementado no procedimento SYSNLIN busca minimizar uma soma de quadrados do tipo:

$$e'(\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n)\epsilon$$

sendo e o vetor de resíduos de dimensão (4n) x 1 das 4 variáveis endógenas s_T, s_L, s_M e s_F empilhadas num vetor coluna; S uma matriz não-singular; e I_n é a matriz identidade de ordem n.

Essencialmente o método SUR envolve um Estimador Generalizado de Mínimos Quadrados ("Joint GLS"). Como em nosso caso o sistema de dispêndios é linear à soma de quadrados e '$(\dot{S}^{-1} \otimes I_n)$ e é minimizada para β

$= [X'(S^{-1} \otimes I_n)X]^{-1}X'(S^{-1} \otimes I_n)y$. Note que aqui X é uma matriz diagonal em blocos, onde o i-ésimo bloco é definido pelos dados da i-ésima "share".

No primeiro estágio do método de estimação, faz-se $S = I_n$, o que reduz o cálculo de $\hat{\beta}$ a estimação de mínimos quadrados em cada equação. No segundo estágio, de posse dos resíduos, calcula-se $S = (S_{ij})$, $S_{ij} = e_i'e_j/n$, onde e_i e e_j são os resíduos das equações i e j. Note que S é uma estimativa consistente da matriz Σ. Com este valor de S, obtém-se a estimativa final de $\hat{\beta}$.

A estimação dos parâmetros de um sistema de dispêndios – no caso de haver restrições – deve ser feito em dois estágios, pois o procedimento SYSNLIN não reconhece quando as equações sendo estimadas estão com restrições. No primeiro estágio, executa-se o procedimento sem as restrições, neste caso de simetria e homogeneidade linear, de forma a se obter os resíduos e_i. No segundo estágio, executa-se o procedimento introduzindo a matriz S no procedimento SYSNLIN, exatamente como se estivéssemos fazendo um teste de especificação, e estimam-se os parâmetros do modelo reduzido. Estas são as estimativas de interesse.

É importante observar que $\hat{\beta}$ poderia ser obtido também do procedimento SYSLIN (SAS 1985b). Verifica-se, no entanto, que o SYSNLIN oferece recursos adicionais. Por exemplo, a matriz de variância-covariância de $\hat{\beta}$, necessária para a estimação dos desvios das elasticidades, não pode ser obtida integralmente do procedimento SYSLIN.

As equações das elasticidades

A forma flexível de Fourier é linear em θ. As componentes θ_j representam os u_0, os b_i, os C_{ij}, os u_α, e os v_α, que são escritos na mesma ordem em que aparecem na equação. As variáveis correspondentes são o termo constante, os termos lineares x_i, os termos quadráticos $x_i x_j$ e os termos em $\cos(jk_\alpha x)$ e $\sin(jk_\alpha x)$.

Nesta aplicação o vetor θ possui dimensão 62 e é da seguinte forma

$$\theta = (b_1, b_2, b_3, b_4, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{16}, C_{17}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{26}, C_{27}, C_{33}, C_{34}, C_{36}, C_{37}, C_{44}, C_{46}, C_{47}, u_{01}, u_{02}, u_{03}, u_{04}, u_{05}, u_{06}, u_{07}, u_{08}, u_{09}, u_{10}, v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{04}, v_{05}, v_{06}, v_{07}, v_{08}, v_{09}, v_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{20}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20})' .$$

Cada equação de participação, apresentada na Seção 3.2, possui um vetor linha associado g_i, i = T,L,M,F,OD, que, multiplicado pelo θ acima definido, replica a equação de participação. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_T = {} & (1,0,0,0,x_T - x_{OD}, x_L - x_{OD}, x_M - x_{OD}, \\
& x_F - x_{OD}, x_{N+1}, x_{N+2}, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, \\
& -\sin(x_T - x_L + x_{N+2}), 0, -\sin(x_T - x_M + x_{N+2}), \\
& -\sin(x_T - x_F + x_{N+2}), -\sin(x_T - x_{OD} + x_{N+2}), 0,0,0, \\
& 0,0,\cos(x_T - x_L + x_{N+2}), 0, \cos(x_T - x_M + x_{N+2}), \\
& \cos(x_T - x_F + x_{N+2}), \cos(x_T - x_{OD} + x_{N+2}), 0,0,0, \\
& 0,0,-\sin(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2}), 0, -\sin(x_T - x_M \\
& + x_{N+1} + x_{N+2}), -\sin(x_T - x_F + x_{N+1} + x_{N+2}), -\sin(x_T \\
& - x_{OD} + x_{N+1} + x_{N+2}), 0,0,0,0,0, \cos(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2}), \\
& 0, \cos(x_T - x_M + x_{N+1} + x_{N+2}), \cos(x_T - x_F + x_{N+1} + x_{N+2}), \\
& \cos(x_T - x_{OD} + x_{N+1} + x_{N+2}))' \ .
\end{aligned}$$

Analogamente, os componentes da matriz Hessiânica H(x) de g(x) também podem ser escritos na forma linear vetorial. Assim, por exemplo, $h_{TL}(x) = \partial s_T/\partial x_L$ pode ser escrito como o produto de h_{TL} por θ, onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{TL} = {} & (0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, \\
& 0,0,0,\cos(x_T - x_L + x_{N+2}), 0,0,0,0,0,0,0,0,0, \\
& \sin(x_T - x_L + x_{N+2}), 0,0,0,0,0,0,0,0,0, \\
& \cos(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2}), 0,0,0,0,0,0,0,0,0, \\
& \sin(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2})'
\end{aligned}$$

A elasticidade de substituição e seu desvio padrão

Usando a notação introduzida na Seção 3.4, têm-se as seguintes expressões para as elasticidades de substituição (Gallant 1982).

Se $i \neq j$ e $i,j \neq OD$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(\theta) &= 1 + (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta) \\
(\partial/\partial\theta)\sigma_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_i \\
&\quad -(\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_j \ .
\end{aligned}$$

Se $i = j$ e $i \neq OD$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii}(\theta) &= 1 + (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ii}'\theta) - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1} \\
(\partial/\partial\theta)\sigma_{ii}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}\mathbf{h}_{ii} - 2(\mathbf{g}_i'\theta)^{-3}(\mathbf{h}_{ii}'\theta)\mathbf{g}_i + (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}\mathbf{g}_i \ .
\end{aligned}$$

Para o caso da participação de Outras Despesas, OD, duas equações foram desenvolvidas: uma, quando apenas um dos índices é igual a OD, e a outra, quando ambos os índices são iguais a OD.

Se $i = OD$ e $j = T, L, M, F$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\theta) &= 1 + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta) \\ (\partial/\partial\theta)\sigma_{ij}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_S \\ &\quad -(1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_j \quad , \end{aligned}$$

onde $\mathbf{g}_S = \mathbf{g}_T + \mathbf{g}_L + \mathbf{g}_M + \mathbf{g}_F$.

Para $i = j$ e $i = OD$

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(\theta) &= 1 + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ii}'\theta) - (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1} \\ (\partial/\partial\theta)\sigma_{ii}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}\mathbf{h}_{ii} + 2(1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-3}(\mathbf{h}_{ii}'\theta)\mathbf{g}_S \\ &\quad + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}\mathbf{g}_S \quad . \end{aligned}$$

O desvio padrão da elasticidade de substituição é calculado por

$$SE(\hat{\sigma}_{ij}) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta'}\sigma_{ij}(\hat{\theta})\ \hat{\Omega}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma_{ij}(\hat{\theta})\right]^{1/2}$$

onde $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}(\hat{\theta})$ e $\hat{\Omega}$ é a matriz de variância-covariância dos parâmetros da FFF, i.e., $\hat{\Omega} = (X'(S^{-1} \otimes I_n)X)^{-1}$.

A elasticidade de preços e seu desvio padrão

Para as elasticidades de preços tem-se

Para as Elasticidades de Preços tem-se

Se $i \neq j$ e $i, j \neq OD$

$$\begin{aligned} \eta_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta) + (\mathbf{g}_j'\theta) \\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j \end{aligned}$$

Se $i = j$ e $i \neq OD$

$$\begin{aligned} \eta_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ii}'\theta) + (\mathbf{g}_i'\theta) \\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ii}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ii} - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ii}'\theta)\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_i \end{aligned}$$

Analogamente à elasticidade de substituição, foram desenvolvidas duas equações para o caso de Outras Despesas, OD.

Se $i = OD$ e $j = T, L, M, F$

$$\begin{aligned}\eta_{ij}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}'_S\theta)^{-1}(\mathbf{h}'_{ij}\theta) + (\mathbf{g}'_j\theta)\\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ij}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}'_S\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} + (1 - \mathbf{g}'_S\theta)^{-2}(\mathbf{h}'_{ij}\theta)\mathbf{g}_S + \mathbf{g}_j\end{aligned}$$

Para $i = j$ e $i = OD$

$$\begin{aligned}\eta_{ii}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}'_S\theta)^{-1}(\mathbf{h}'_{ii}\theta) + (1 - \mathbf{g}'_S\theta)\\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ii}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}'_S\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ii} + (1 - \mathbf{g}'_S\theta)^{-2}(\mathbf{h}'_{ii}\theta)\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_S\end{aligned}$$

O desvio padrão da elasticidade cruzada de preços é calculado por

$$SE(\hat{\eta}_{ij}) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta'}\eta_{ij}(\bar{\theta})\ \bar{\Omega}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\eta_{ij}(\bar{\theta})\right]^{1/2}$$

onde $\hat{\eta}_{ij} = \eta_{ij}(\bar{\theta})$.

As equações de vieses tecnológicos

Anteriormente foram derivadas as equações gerais de vieses tecnológicos, que agora serão particularizadas à FFF e, em termos de nossa aplicação. Por exemplo, para o caso da participação do trabalho, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{ds^*_T}{dt} &= C_{16}\frac{dx_{N+1}}{dt} + C_{17}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\\ &+ \left\{\sum_{\alpha=1}^{10}\left[-u_\alpha\cos(\mathbf{k}'_\alpha\mathbf{x}) - v_\alpha\sin(\mathbf{k}'_\alpha\mathbf{x})\right]k^{(1)}_\alpha\right\}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\\ &+ \left\{\sum_{\alpha=10}^{20}\left[-u_\alpha\cos(\mathbf{k}'_\alpha\mathbf{x}) - v_\alpha\sin(\mathbf{k}'_\alpha\mathbf{x})\right]k^{(1)}_\alpha\right\}\left[\frac{dx_{N+1}}{dt} + \left(\frac{\lambda}{t}\right)\right]\end{aligned}$$

Nesta expressão dx_{N+1}/dt representa a taxa de variação instantânea dos PIL. Vale observar que, no período de 1950 a 1980 (Tabelas 8.a e 8.b), nos primeiros 13 anos, o PIL cresce a uma taxa positiva; do 14º a 18º ano o PIL apresenta uma taxa negativa; voltando a crescer, possivelmente com a mesma taxa do período inicial, do 19º ano em diante.

Fórmulas análogas se obtêm para ds_L/dt, ds_M/dt, ds_M/dt e ds_F/dt. Para o caso de ds_{OD}/dt utiliza-se o fato que

$$\frac{ds^*_{OD}}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - s_T - s_L - s_M - s_F) = -\left(\frac{ds^*_T}{dt} + \frac{ds^*_L}{dt} + \frac{ds^*_M}{dt} + \frac{ds^*_F}{dt}\right)$$

TABELA 1.a. Dados de preços.

Anos	PT	PL	PM	PF	Pod
1950	45,35	22,68	5.880	6.655	0,919
1	58,36	29,18	5.562	6.692	0,918
2	78,33	26,11	5.671	7.015	0,918
3	98,56	30,33	8.973	7.157	0,918
4	113,43	29,85	12.623	6.066	0,917
5	138,46	30,77	15.003	7.020	0,917
6	166,81	25,66	13.935	7.203	0,917
7	213,48	29,96	13.348	6.273	0,917
8	275,02	26,51	12.029	6.793	0,916
9	288,46	24,04	20.075	6.204	0,914
1960	323,84	20,47	16.211	5.094	0,910
1	342,20	23,08	13.724	7.418	0,909
2	327,72	22,38	18.683	8.567	0,909
3	271,14	20,42	21.838	8.724	0,908
4	206,40	21,71	24.040	8.548	0,908
5	191,08	26,49	20.912	10.751	0,908
6	297,46	20,45	17.392	8.495	0,908
7	308,93	21,14	18.403	6.975	0,907
8	318,64	21,45	17.605	6.073	0,907
9	328,99	21,03	17.823	6.039	0,904
1970	344,17	21,56	14.384	5.583	0,898
1	415,60	22,92	13.558	5.244	0,909
2	487,65	22,17	13.432	5.959	0,912
3	633,27	29,18	12.172	6.476	0,916
4	742,01	36,66	10.570	11.679	0,925
5	747,48	38,80	10.792	11.530	0,953
6	671,89	38,23	8.717	8.071	0,978
7	709,00	39,22	12.705	7.048	0,984
8	670,51	38,57	13.323	6.578	0,995
9	685,25	39,81	12.897	6.650	1,016
1980	720,47	40,82	10.723	8.140	1,083
1	822,58	39,40	13.160	7.914	0,970
2	809,15	36,78	15.499	7.154	0,973

Fonte: Santos 1986.

TABELA 1.b. Dados das participações.

Anos	ST	SL	SM	SF	Sod
1950	0.132900	0.633100	0.0009000	0.0074000	0.225700
1	0.134900	0.660500	0.0013000	0.0080000	0.195300
2	0.185100	0.606100	0.0018000	0.0051000	0.201900
3	0.207000	0.601200	0.0027000	0.0075000	0.181600
4	0.230500	0.580700	0.0049000	0.0052000	0.178700
5	0.259100	0.558300	0.0061000	0.0082000	0.168300
6	0.321700	0.484500	0.0062000	0.0086000	0.179000
7	0.348300	0.478800	0.0057000	0.0086000	0.158600
8	0.415200	0.410000	0.0052000	0.0110000	0.158600
9	0.422700	0.380300	0.0089000	0.0083000	0.179800
1960	0.409500	0.328800	0.0071000	0.0077000	0.246900
1	0.402200	0.338800	0.0060000	0.0085000	0.244500
2	0.393800	0.355800	0.0091000	0.0096000	0.231700
3	0.357500	0.336900	0.0128000	0.0142000	0.278600
4	0.289300	0.382400	0.0168000	0.0120000	0.299500
5	0.250800	0.434000	0.0145000	0.0160000	0.284700
6	0.374000	0.323600	0.0123000	0.0116000	0.278500
7	0.373400	0.322900	0.0129000	0.0145000	0.276300
8	0.373100	0.316000	0.0126000	0.0162000	0.282100
9	0.369400	0.301500	0.0127000	0.0158000	0.300600
1970	0.336600	0.277200	0.0089000	0.0185000	0.358800
1	0.312100	0.227000	0.0070000	0.0153000	0.438600
2	0.328800	0.198300	0.0071000	0.0233000	0.442500
3	0.340600	0.205600	0.0059000	0.0193000	0.428600
4	0.300100	0.192400	0.0044000	0.0279000	0.475200
5	0.371200	0.252900	0.0061000	0.0350000	0.334800
6	0.350800	0.259000	0.0059000	0.0321000	0.352200
7	0.358500	0.256800	0.0091000	0.0343000	0.341300
8	0.347600	0.259400	0.0104000	0.0326000	0.350000
9	0.349100	0.260500	0.0109000	0.0351000	0.344400
1980	0.356800	0.252100	0.0092000	0.0464.000	0.335500
1	0.303600	0.211200	0.0094000	0.0234.000	0.452400
2	0.289700	0.195900	0.0111000	0.0201000	0.483200

Fonte: Santos 1986.

TABELA 1.c. Dados do PIL.

Anos	PIL IPPA
1950	79022
51	76155
52	79644
53	86672
54	86718
55	98286
56	98323
57	110545
58	113795
59	121474
1960	122654
61	128887
62	147529
63	136655
64	142000
65	131633
66	108860
67	115353
68	125656
69	128505
1970	119005
71	131570
72	141766
73	178915
74	207271
75	230781
76	268042
77	314641
78	296302
79	318583
1980	305913

Fonte: Santos 1986.

A APLICAÇÃO NUMÉRICA

Os dados utilizados e suas transformações

As Tabelas 1a, 1.b e 1.c apresentam os dados agregados ao nível de Brasil (Santos 1986) utilizados neste estudo. Os valores do PIL estão em valores constantes de 1950, tendo sido corrigidos pelo Índice de Preço de Produtos Agrícolas (IPPA).

A Tabela 2 fornece os parâmetros de escala e localização utilizados.

TABELA 2. Valores das constantes.

Constantes	
$\lambda = 0.6822$	$a_1 = 1.00001$
	$a_2 = 5.1426 \times 10^{-2}$
	$a_3 = 1.8451 \times 10^{-4}$
	$a_4 = 2.2234 \times 10^{-4}$
	$a_5 = 1.1256$
	$a_6 = 1.4071 \times 10^{-5}$
	$a_7 = 1.5$

O sistema de dispêndios

Informações gerais sobre o ajuste do sistema de dispêndio são dadas na Tabela 3.a. É notório o alto poder de previsão do modelo. A presença de multicolinearidade era esperada. Neste contexto, observe-se que o interesse é por $D^{\lambda}g(x)$ e não pelos valores particulares de θ_i.

O teste F de Fourier versus Translog

Para realização do teste F entre o modelo completo (a função de custo da FFF) e o modelo reduzido (a função de custo Translog), faz-se necessária a estimação da função de custo Translog, através dos procedimentos descritos ateriormente.

Em testes de especificação, a estimativa da matriz de variância-covariância, S deve ser a mesma para os modelos completo e reduzido (Gallant 1987).

Neste contexto, para testar a hipótese de uma tecnologia Translog, no primeiro estágio, as equações das participações derivadas da FFF são escritas em sua forma geral – sem as restrições de simetria e homogeneidade linear – para obter a estimativa S de Σ. De posse desta estimativa S, dá-se início ao segundo estágio do processo de estimação, introduzindo-a no procedimento SYSNLIN como a estimativa de Σ, que será utilizada com as equações – já com as restrições devidamente impostas – para obter as estimativas dos parâmetros das equações de participação do modelo completo, sob as condições de simetria e homogeneidade linear. Finalmente, num terceiro estágio, esta mesma matriz S é usada na estimação do modelo reduzido (a função de custo Translog, que é o modelo FFF sem os termos trigonométricos).

A estatística

$$L = \frac{(SSE_{reduzido} - SSE_{completo})/q}{(SSE_{completo})/(4n - p)} ,$$

onde $SSE_{completo}$ é a soma de quadrados dos resíduos do ajuste da função de custo da FFF; $SSE_{reduzido}$ é a soma de quadrados dos resíduos correspondente ao Translog; q é o número de restrições sobre θ impostas pela redução da FFF ao Translog; p é o número de colunas em X, admitida a inclusão das restrições ativas, no caso as de simetria e homogeneidade linear; e 4n o número de observações, rejeita a hipótese de que os parâmetros dos termos trigonométricos são nulos, quando excede o ponto crítico F_α de α x 100% da distribuição F com q graus de liberdade no numerador e n - p graus de liberdade no denominador:

Obteve-se $$L = \frac{(1968.41 - 285.39)/40}{285.39/62} = 9.14$$

Como $F_{0.01} = F^{-1}(0.99; 40,62) = 1.92$, rejeita-se ao nível de 1% a tecnologia Translog. Veja as Tabelas 3.a e 3.b.

A estimativa de elasticidades

Para a estimação das elasticidades de substituição e de preços foram utilizadas as equações vetoriais lineares apropriadas e o procedimento MATRIX (SAS 1985a).

As Tabelas 4, 5, 6 e 7 comparam as estimativas ao fim das três décadas cobertas na análise com os resultados de Santos (1986). As diferenças são significantes. Os desvios amostrais estão anotados sob parêntes.

TABELA 3.a Sistema de dispêndios FFF sur estimation summary (Listagem SAS - 85).

Parameters estimated 62	
Minimization summary	
Method	Gauss
Iterations	1
Estimation time	1.303
Final convergence criteria	
R	0
PPC	1.606E-09
RPC(B2)	7176.4
Object	0.99877
Trace(s)	0.000985365886
Objective	9.206075098
Observations processed	
Read	31
Solved	31

SAS

Sysnl in procedure sur estimation
Nonlinear sur summary of residual errors

Equation	DF Model	DF Error	SSE	MSE	Root MSE	R-square	Label
ST	15.5	15.5	0.01133	.00073084	0.02703	0.9370	Share of land
SL	15.5	15.5	.00382629	.00024686	0.01571	0.9934	Share of labor
SM	15.5	15.5	5.36E-06	3.46E-07	.00058825	0.9886	Share of machinery
SF	15.5	15.5	.00011352	7.32E-06	.00270625	0.9686	Share of fertilizer

Nonlinear sur parameter estimates

Parameter	Estimate	Aprox. STD Error	'T' Ratio	Aprox. Prob > τ
B1	0.20585	0.01647	12.50	0.0001
B2	0.72492	0.04445	16.31	0.0001
B3	-0.02725	.00292252	-6.93	0.0001
B4	0.02715	0.02244	1.21	0.2450
C11	0.28022	0.01694	16.55	0.0001
C12	-0.24922	0.01462	-17.05	0.0001
C13	-0.01231	0.0013476	-9.14	0.0001
C14	.00807229	.00766759	1.05	0.3091
C16	0.03011	0.01357	2.22	0.0423
C17	-0.08662	0.01180	-7.34	0.0001
C22	0.21155	0.04631	4.57	0.0004
C23	0.01278	.00462835	2.76	0.0146
C24	0.05335	0.01421	3.76	0.0019
C26	0.04669	0.01131	4.13	0.0009
C27	0.08611	0.03648	-2.36	0.0322
C33	-0.01047	.00460703	-2.27	0.0381
C34	-.0077264	.00572257	-1.35	0.1970
C36	.00329611	.00193157	1.71	0.1085
C37	0.02822	.00319755	8.83	0.0001
C44	-0.11966	0.03343	-3.58	0.0027
C46	0.02730	.00601779	4.54	0.0004
C47	.00874326	0.01485	0.59	0.5648
U01	0.07055	0.02143	3.29	0.0049
U02	-.0015198	.00413493	-0.37	0.7183
U03	-.0015108	.00424872	-0.36	0.7271
U04	-0.044953	0.03310	-1.50	0.1552
U05	0.01868	.00337001	5.54	0.0001
U06	-.0072478	0.02050	-0.35	0.7286
U07	0.04215	0.01289	3.27	0.0052
U08	-.0087335	0.0018831	-4.64	0.0003
U09	.00680282	.00674048	1.01	0.3289
U10	-0.05618	0.03189	-1.76	0.0985
V01	0.05364	0.01043	5.14	0.0001
V02	-4.78E-04	.00351457	-0.14	0.8937

TABELA 3.a. Sistema de dispêndios FFF (continuação).

Nonlinear sur parameter estimates

Parameter	Estimate	Aprox. STD error	'T' Ratio	Approx. Prob > τ
V03	.00825444	.00555253	1.49	0.1578
V04	-0.03121	0.04633	-0.67	0.5107
V05	-0.02030	.00344638	-5.89	0.0001
V06	0.01370	0.01225	1.12	0.2811
V07	-0.02436	0.01092	-2.23	0.0414
V08	-.0090041	.00232891	-3.87	0.0015
V09	0.01444	.00860815	1.68	0.1142
V10	-0.05538	0.02024	-2.74	0.0153
U11	.00432137	.00672979	0.64	0.5305
U12	.00485817	.00147279	3.30	0.0049
U13	-.0044729	.00318866	-1.40	0.1810
U14	.00886689	0.02010	0.44	0.6654
U15	-.0086935	.00139417	-6.24	0.0001
U16	.00463698	0.01138	0.41	0.6895
U17	-0.01073	.00686291	-1.56	0.1388
U18	.00064837	.00118908	0.55	0.5936
U19	.00497155	.00385214	1.29	0.2164
U20	0.07155	0.01688	4.24	0.0007
V11	-0.03992	.00629177	-6.35	0.0001
V12	-.0040402	.00172637	-2.34	0.0335
V13	9.81E-05	.00234406	0.04	0.9672
V14	-0.01781	0.01399	-1.27	0.2221
V15	.00272123	0.0013482	2.02	0.0618
V16	-.0039436	0.01376	-0.29	0.7783
V17	-.0036437	0.0058963	-0.62	0.5459
V18	0.01033	.00200412	5.16	0.0001
V19	-.0010175	0.0061577	-0.17	0.8710
V20	0.02298	0.02283	1.01	0.3301

Number of observations			Statistics for system
Used	31	Objective	9.20608
Missing	0	Objective* N	285.39

TABELA 3.b. Sistema de dispêndios Translog (Listagem SAS - 85).

Sur estimation summary	
Parameters estimated	22
Minimization summary	
Method	Gauss
Iterations	1
Estimation time	0.433
Final convergence criteria	
R	0
PPC	6.1936E-13
RPC(B2)	6649.6
Object	0.99162
Trace(s)	0.002744447631
Objective	63.4970978
Observations processed	
Read	31
Solved	31

SAS

Sysnl in procedure sur estimation

Monlinear sur summary of residual errors

Equation	DF Model	DF Error	SSE	MSE	Root MSE	R-square	Label
ST	55.5	25.5	0.04865	.00190792	0.04368	0.7294	Share of land
SL	55.5	25.5	0.02079	.00081519	0.02855	0.9544	Share of labor
SM	55.5	25.5	2.94E-05	1.15E-06	.00107372	0.9376	Share of machinery
SF	55.5	25.5	.00051479	2.02E-05	00449311	0.8576	Share of fertilizer

TABELA 3.b. Sistemas de dispêndios Translog (continuação).

Nonlinear sur parameter estimates

Parameter	Estimate	Aprox. STD Error	'T' Ratio	Aprox. Prob > τ
B1	0.23691	.00791004	29.95	0.0001
B2	0.67171	.00514836	130.47	0.0001
B3	-.0019949	.00025549	-7.81	0.0001
B4	-.0010871	.00131266	-0.83	0.4154
C11	0.22610	0.01290	17.53	0.0001
C12	-0.24593	.00737514	-33.35	0.0001
C13	-0.01323	.00036764	-36.00	0.0001
C14	-.0060948	.00185927	-3.28	0.0031
C16	0.02019	.00706464	-2.86	0.0085
C17	-0.06331	.00929438	-6.81	0.0001
C22	0.23691	.00850757	27.85	0.0001
C23	-0.01267	.00045926	-27.58	0.0001
C24	0.01155	.00227255	5.08	0.0001
C26	-0.02831	.00469905	-6.03	0.0001
C27	-0.005451	.00555585	-0.98	0.3359
C33	.00441237	.00021823	20.22	0.0001
C34	.00155747	.00026934	5.78	0.0001
C36	.00547825	.00021122	25.94	0.0001
C37	0.01058	.00031326	33.77	0.0001
C44	.0007082	.00164337	0.43	0.6702
C46	0.01729	.00109751	15.76	0.0001
C47	.00428718	.00148802	2.88	0.0080

Number of observations		Statistics for system	
Used	31	Objective	63.49710
Missing	0	Objetive* N	1968.41

TABELA 4. Elasticidades, ano de 1960.

			Elasticidades de substituição, σ_{ij}		
Fatores produção	Terra	Trabalho	Máquinas	Fertilizantes	Outras despesas
Terra	-0.2627	-0.8027	-2,16	0.6742	1.7601
	(0.07771)	(0.084851)	(0.2844)	(1.1158)	(0.25337)
Trabalho		-0.11075	0.4760	6.6287	1.13428
		(0.22085)	(0.94601)	(2.39953)	(0.303549)
Máquinas			-118.1	-25.5	8.6210
			(30.26)	(25.82)	(1.8496)
Fertilizantes				-753.4	19.6991
				(217.87)	(4.7785)
Outras despesas					-6.2100
					(0.83288)
Elasticidades de preços n_{ii}					
n_{ii}	0.88674	0.96335	0.0910	-5.649	-0.37453
	(0.032965)	(0.073170)	(0.23725)	(1.42150)	(0.191409)

TABELA 5. Elasticidades, ano de 1970.

			Elasticidades de substituição, σ_{ij}		
Fatores produção	Terra	Trabalho	Máquinas	Fertilizantes	Outras despesas
Terra	-0.0803	--1.7118	-1.96	2.0125	1.3926
	(0.14638)	(0.157344)	(0.3564)	(1.0275)	(0.22068)
Trabalho		-0.33123	1.4885	6.5808	1.43676
		(0.50345)	(0.98405)	(1.56291)	(0.302383)
Máquinas			-3.6	-4.5	3.4182
			(23.26)	(17.30)	(1.1223)
Fertilizantes				-220.5	3.7965
				(42.06)	(1.4166)
Outras despesas					-2.7802
					(0.37374)
Elasticidades de preços n_{ii}					
n_{ii}	0.97247	0.90747	0.9664	-2.820	-0.02368
	(0.050203)	(0.140420)	(0.21587)	(0.72115)	(0.132360)

TABELA 6. Elasticidades, ano de 1980.

Elasticidades de substituição, σ_{ij}					
Fatores produção	Terra	Trabalho	Mâquinas	Fertilizantes	Outras despesas
Terra	1.54694 (0.34266)	-1.9638 (0.337637)	-2.4559 (1.0321)	1.51828 (0.7288)	-0.26744 (0.50061)
Trabalho		0.127701 (1.52130)	3.2189 (2.44370)	4.27247 (1.10497)	1.14072 (0.772866)
Mâquinas			-82.07 (28.53)	-8.928 (6.74)	3.46372 (1.7198)
Fertilizantes				-24.588 (5.90)	-1.4124 (0.5647)
Outras despesas					-0.48903 (0.83147)
Elasticidades de preços n_{ii}					
n_{ii}	1.54719 (0.121616)	1.03252 (0.387454)	0.2610 (0.26416)	-0.066 (0.25510)	0.83410 (0.270217)

TABELA 7. Elasticidades geradas pelo Translog.

Elasticidades de substituição, σ_{ij}					
Fatores produção	Terra	Trabalho	Mâquinas	Fertilizantes	Outras despesas
Terra	-1.9220 (0.0863)	0.1194 (0.0684)	0.9267 (0.2198)	3.5967 (0.3586)	0.9702 (1.3095)
Trabalho		(0.3009) (0.08565)	-0.0581 (0.2828)	1.7887 (0.4635)	0.1918 (0.0833)
Mâquinas			-127.4572 (14.4965)	27.3626 (12.9991)	2.1498 (0.9844)
Fertilizantes				-65.5269 (23.6065)	-2.4031 (1.3333)
Outras despesas					-0.8393 (?)
Elasticidades de preços n_{ii}					
n_{ii}	-0.4453 (0.0200)	-0.1204 (0.0343)	-1.3515 (0.1537)	-1.0173 (0.3665)	-0.2870 (?)

Fonte: Santos (1986)

A estimação da taxa de variação do PIL agrícola e dos vieses tecnológicos

Para estimar a taxa de variação do PIL, foi montada uma equação de regressão da seguinte forma:

$$V = C_0 + C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3(D_1 Y) + C_4(D_2 Y) + C_5 Y + erro$$

onde Y representa o tempo em anos, variando de 1 a 31 e

$$D_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq Y \leq 13 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } 14 \leq Y \leq 18 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Para 1 ⩽ Y ⩽ 13 tem-se o modelo

$$V_1 = C_0 + C_1 + (C_3 + C_5)Y$$

Para 14 ⩽ Y ⩽ 18 tem-se o modelo

$$V_2 = C_0 + C_2 + (C_4 + C_5)Y$$

Para Y ⩾ 19 tem-se o modelo

$$V_3 = C_0 + C_5 Y$$

Tendo em vista a existência de heterocedasticidade foi feita a transformação V' = $\sqrt{V}$. Os resultados do ajuste deste modelo encontram-se na Tabela 8.a. No contexto desta expressão, as taxas de crescimento do PIL (Tabela 8.b) são dadas pela fórmula:

$$\frac{dV'}{dt} = 2[C_0 + C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3(D_1 Y) + C_4(D_2 Y) + C_5 Y](C_3 D_1 + C_4 D_2 + C_5)$$

Utilizando-se esta taxa de variação do PIL, obtém-se a série de vieses da Tabela 9.

TABELA 8.a. Estimação da taxa de variação do PIL (Listagem SAS - 85).

```
Data WORK5; SET WORK4; KEEP PIL1 PIL D1 D2 X1 X2 Y;
  IF 18 < Y < 32 THEN DO; D1 = 0, D2 = 0; END,
  IF 13 < Y < 19 THEN DO; D2 = 0, D1 = 0; END,
  IF  0 < Y < 14 THEN DO; D2 = 0, D1 = 0; END,
  X1 = D1*Y; X2 = D2*Y; PIL1 = SQRT (PIL);
```

NOTE: DATA SET WORK WORKS HAS 31 OBSERVATIONS AND 7 VARIABLES. 634 OBS/TRK.
NOTE: THE DATA STATEMENT USED 0.18 SECONDS.

```
PROC SYSLIN OUT = D DATA = WORK5;
  MODEL PIL1 = D1 D2 X1 X2 Y/DH;
  OUTPUT R = RES1;
```

NOTE THE DATA SET WORK D HAS 31 OBSERVATIONS AND 8 VARIABLES. 560 OBS/TRK.
NOTE: THE PROCEDURE SYSLIN USED 0.16 SECONDS AND PRINTED PAGE 2.

```
PROC PLOT DATA = D;
  PLOT RES1*Y/VREF = 0:
```

NOTE: THE PROCEDURE PLOT USED 0.15 SECONDS AND PRINTED PAGE 3.
NOTE: SAS INSTITUTE INC.
SAS CIRCLE
PO BOX 8000
CARY, N.C. 27511-8000

SAS

M	COL1
ROWM1	6.27684
ROW2	0.0942528

SAS

MODEL: EQU 1
DEP
VARIABLE: PIL1

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F VALUE	PROB > F
MODEL	5	3.48580891	0.69716178	119.051	0.0001
ERROS	25	0.14639956	0.005855982		
C TOTAL	30	3.63220847			

TABELA 8.a. Estimação da taxa de variação do PIL (Continuação)

ROOT MSE	0.07652439	R-SQUARE	0.9597
DEP MEAN	0.8310002	ADJ R-SQ	0.9516
C.V.	9.208709		

PARAMETER ESTIMATES

VARIABLE	DF	PARAMETER ESTIMATE	STANDARD ERROR	T FOR HO: PARAMETER = 0	PROB > T
INTERCEP	1	-0.37430555	0.14338860	-2.610	0.0151
D1	1	0.45051748	0.15029092	2.998	0.0061
D2	1	1.99078573	0.41430018	4.805	0.0001
X1	1	0.009777367	0.008021936	1.219	0.2343
X2	1	-0.10922385	0.02485506	-4.394	0.0002
Y	1	0.05927821	0.005672365	10.450	0.0001

TABELA 8.b. Taxa de variação do PIL (Listagem SAS - 85).

SAS		SAS	
Ano	A	Ano	A
1	0.020063	17	-0.076657
2	0.0029600	18	-0.071668
3	0.039138	19	0.089152
4	0.048675	20	0.096180
5	0.058212	21	0.103208
6	0.067750	22	0.110236
7	0.077287	23	0.117263
8	0.086824	24	0.124291
9	0.096367	25	0.131319
10	0.105899	26	0.138347
11	0.115437	27	0.145375
12	0.124974	28	0.152402
13	0.134511	29	0.159430
14	-0.091624	30	0.166458
15	-0.086635	31	0.173.486
16	-0.081646		

TABELA 9. Vieses tecnológicos.

Ano	Coeficientes de Binswanger				
	Br	Bl	Bm	Bt	Bod
1	-0.44084	-0.078552	13.6355	-1.2513	0.559115
2	-0.24256	-0.003350	2.6979	-0.7736	0.146190
3	-0.07861	0.001857	1.9656	0.3346	0.038673
4	-0.02639	0.003340	0.9657	0.1663	-0.003879
5	-0.01019	0.003288	0.5576	0.1930	-0.016911
6	-0.00668	-0.000210	0.3761	0.2101	-0.015608
7	-0.00657	0.000944	0.3091	0.2945	-0.017127
8	-0.01846	-0.005412	0.1746	0.2067	0.039828
9	-0.02396	-0.006180	0.1783	0.2407	0.051579
10	-0.02850	-0.006711	0.1356	0.3118	0.051573
11	-0.02899	-0.006221	0.0874	0.3656	0.048159
12	-0.03404	-0.011663	0.1388	0.2075	0.060178
13	-0.03990	-0.013403	0.1078	0.1649	0.061458
14	-0.01698	0.002932	0.0728	-0.0078	0.015090
15	-0.01968	0.001997	0.0472	-0.0029	0.018097
16	-0.02410	-0.000504	0.0382	0.0070	0.022193
17	-0.01180	0.000383	0.0523	0.0012	0.012143
18	-0.01000	-0.000490	0.0518	0.0062	0.009531
19	-0.02783	-0.011987	0.0464	0.1223	0.032741
20	-0.02838	-0.012746	0.0478	0.1074	0.032146
21	-0.02780	-0.014269	0.0517	0.1209	0.031163
22	-0.02797	-0.016260	0.0999	0.0736	0.029738
23	-0.02236	-0.018048	0.1346	0.0599	0.024260
24	-0.00345	-0.013563	0.2180	0.0558	0.003737
25	0.01409	-0.004782	0.2119	0.1747	-0.025219
26	0.02392	0.002445	0.1663	0.1733	-0.041047
27	0.03499	0.007099	0.1736	0.1816	-0.052109
28	0.04368	0.014424	0.1434	0.1852	-0.081800
29	0.04416	0.014665	0.1475	0.1671	-0.071098
30	0.04943	0.018437	0.1405	0.1763	-0.090429
31	0.05080	0.019956	0.1298	0.1751	-0.093762

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo principal mostrar como o problema da estimação de sistemas de dispêndios para fatores de produção pode ser resolvido utilizando-se as Formas Flexíveis de Fourier. Como subproduto, procurou-se mostrar, de uma maneira tão didática quanto possível, o que são estas Formas Flexíveis de Fourier, proporcionando ao leitor a oportunidade de avaliar a sua relevância. Com vistas a atingir estes objetivos de modo intuitivo, utilizou-se uma variante da FFF, que preserva a parte Translog de maneira explícita. Isto difere da forma proposta em Gallant (1982), onde a matriz C do Translog é dada por $C = -\Sigma^{A}_{\alpha=1} a_{0\alpha} k_{\alpha} k'_{\alpha}$. Faz-se mister observar que nossa formulação não invalida os resultados assintóticos conhecidos para a FFF.

A estimação das elasticidades na agricultura brasileira mostra que elas mudam muito ao longo do período em consideração. Isto indica, muito provavelmente, variações constantes de política, e, como sugerido em Gallant (1982), torna difícil a interpretação das elasticidades.

Os vieses tecnológicos indicam uma economia quase neutra na utilização de trabalho e terra, com tendência ao uso intensivo de máquinas e fertilizantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREWS, D.W.K. **Asymptotic Normality of Series Estimators for Various Nonparametric and Semiparametric Models.** s.l., Yale UniversityDepartment of Economics, 1988.

BERNDT, E.R. & KHALED, M.S. Parametric productivity measurement and choice among flexible functional forms. **J. Polit. Econ., 87**:1220-45, 1979.

BINSWANGER, H.P. The measurement of Technical Change Biases with Many Factors of Production. **Am. Econ. Rev., 64**:964-76, 1974.

CHALFANT, J.A. & GALLANT, A.R. Estimating Substitution Elasticities with the Fourier Cost Function. **J. Economet., 28**:205-22, 1985.

EASTWOOD, B.J. & GALLANT, A.R. **Adaptive truncation rules for seminonparametric estimators that Achieve Asymptotic Normality.** Dept. of Statistics, North Carolina State University, 1987.

EDMUNDS, D.E. & MOSCATELLI, V.B. **Fourier Approximation and Embeddings of Sobolev Spaces.** s.l., s.ed., 1977. Dissertationes Mathematicae CXLX.

ELBADAWI, I.; GALLANT, A.R.; SOUZA, G. An Elasticity can be Estimated Consistently without a priori Knowledge of Functional Form. **Econometrica, 51**:1731-51, 1983.

GALLANT, A.R. On the Bias in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form: The Fourier Flexible Form. **J. Econ., 15**:211-45, 1981.

GALLANT, A.R. Unbiased Determination of Production Technologies. **J. Econ., 20**:285-323, 1982.

GALLANT, A.R. The Fourier Flexible Form. **Am. J. Agric. Econ., 66**:204-8, 1984.

GALLANT, A.R. **Nonlinear Statistical Models.** New York, John Wiley & Sons, 1987.

GRILICHES, Z. The Demand for Fertilizer: An Economic Interpretation of a Technical Change. **J. Farm. Econ., 40**:591-606, 1958.

MONAHAN, J.F. **Enumeration of Elementary Multi-Indices for Multivariate Fourier Series.** Raleigh, NC, North Caroline State University, 1981. (Institute of Statistics, mimeograph series nº 1338).

SANTOS, R.F. **Presença de viezes de mudança técnica na agricultura brasileira.** São Paulo, USP/FEA, Dept. de Economia, 1986. Tese Doutorado.

SAS Institute, Cary, EUA. **The MATRIX procedure:** language and applications. Cary, 1985a. (SAS Technical Report P-135p).

SAS Institute, Cary, EUA. **ETS User's Guide.** Cary, 1985b.

SOUZA, G.S. **On the asymptotic normality of multivariate least square estimators in the context of fourier flexible factor demand systems.** University of Illinois at Chicago, College of Business and Administration, 1988.

WHITE, H. Using least squares to approximate unknown regression functions. **Internat. Econ. Rev., 21**:149-70, 1980.

ZELLNER, A. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. **JASA, 57**:348-68, 1962.

APÊNDICE

Este Apêndice publica de novo as fórmulas do artigo "A forma flexível de Fourier, a estimação de elasticidades e vieses tecnológicos para a agricultura brasileira", p. 327-362, por terem saído muito apagadas.

$$q_i = \frac{\partial C}{\partial p_i}(p_1, p_2, \ldots, p_N, u, t).$$

$$g(\mathbf{x}) = \ln C \left(\frac{e^{\frac{x_1}{\lambda}}}{a_1}, \frac{e^{\frac{x_2}{\lambda}}}{a_2}, \ldots, \frac{e^{\frac{x_{N+2}}{\lambda}}}{a_{N+2}} \right)$$

$$s_i = \frac{\partial}{\partial x_i} g(\mathbf{x}) \ , \ i = 1, 2, \ldots, N$$

Pág. 330

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mid g(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h} \mid \theta^o) \mid}{\mid \mathbf{h} \mid^2} = 0.$$

$$g(\mathbf{x}) = \ln u_{00} + \sum_i b_i x_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} x_i x_j.$$

Pág. 331

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{b}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x}.$$

onde $u_0 = \ln u_{00}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{N+2})'$ e $\mathbf{C} = C_{ij}$.

$$g_{\mathrm{K}}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j \phi_j(\mathbf{x}),$$

Pág. 332

$$\sigma(g) = 1 + \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j} \Big/ \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} \frac{\partial g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j} \quad .$$

$$||e||_{m,p,f} = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \int_a^b \left| \frac{d^i e(x)}{dx^i} \right|^p f(x) dx \right\}^{1/p}$$

$$||e||_{m,\infty,f} = \sum_{i=0}^{m} \max_{x \in \mathcal{H}} \left| \frac{d^i}{dx^i} e(x) \right|$$

Pág. 333

$$|\mathbf{k}| = \sum_{i=1}^{N+2} |k_i| \quad .$$

$$D^{\boldsymbol{\lambda}} e(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\lambda}|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \ldots \partial x_{N+2}^{\lambda_{N+2}}} e(\mathbf{x}) \quad .$$

$$||e||_{m,p,f} = \left(\sum_{|\boldsymbol{\lambda}| \leq m} \int_{\mathcal{H}} |D^{\boldsymbol{\lambda}} e(\mathbf{x})|^p f(\mathbf{x}) dx \right)^{1/p} \quad .$$

Para $p = \infty$, tem-se

$$||e||_{m,\infty,f} = \sum_{|\boldsymbol{\lambda}| \leq m} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}} |D^{\boldsymbol{\lambda}} e(\mathbf{x})|$$

$$g_K(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j \phi_j(\mathbf{x}),$$

Pág. 334

$$g_K(x \mid \theta) = a + bx + \frac{1}{2}cx^2 + 2\sum_{j=1}^{J}[u_j \cos(jx) - v_j \sin(jx)],$$

$$S_n(\theta) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}[y_t - g_K(\mathbf{x}_t \mid \theta)]^2.$$

Pág. 335

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x} \mid \theta) &= \sum_{\alpha=1}^{A} \mu_\alpha(\mathbf{k}_\alpha' \mathbf{x}) \\ \mu_\alpha(z) &= \mu_{0\alpha} + 2\sum_{j=1}^{J}[u_{j\alpha}\cos(jz) - v_{j\alpha}\sin(jz)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_K(\mathbf{x} \mid \theta) = u_0 \quad &+ \quad \mathbf{b}'\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} \\ &+ \quad \sum_{\alpha=1}^{A}\left\{u_{0\alpha} + 2\sum_{j=1}^{J}[u_{j\alpha}\cos(j\mathbf{k}_\alpha'\mathbf{x}) - v_{j\alpha}\sin(j\mathbf{k}_\alpha'\mathbf{x})]\right\} \end{aligned}$$

Pág. 336

$$B_i = \frac{ds_i^*}{dt}\left(\frac{1}{s_i}\right) \quad .$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_i(t)}{p_j(t)}\right) = 0 \quad , \quad i \neq j$$

$$\frac{p_i'(t)p_j(t) - p_i(t)p_j'(t)}{p_j^2(t)} = 0 \quad , \quad \forall\, t$$

ou ainda $$\frac{p_i'(t)}{p_i(t)} = \frac{p_j'(t)}{p_j(t)} \quad , \quad \forall\, t\, .$$

$$
\begin{aligned}
s_M = \frac{\partial g(\mathrm{x})}{\partial x_M} = b_3 \quad &+ \quad C_{13}\left[x_T - x_{OD}\right] + C_{23}\left[x_L - x_{OD}\right] \\
&+ \quad C_{33}\left[x_M - x_{OD}\right] + C_{34}\left[x_F - x_{OD}\right] \\
&+ \quad C_{36}x_{N+1} + C_{37}x_{N+2} \\
&+ \quad \sum_{\alpha=1}^{20}\left[-u_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathrm{x}) + v_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathrm{x})\right] k_\alpha^{(3)} \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_F = \frac{\partial g(\mathrm{x})}{\partial x_F} = b_4 \quad &+ \quad C_{14}\left[x_T - x_{OD}\right] + C_{24}\left[x_L - x_{OD}\right] \\
&+ \quad C_{34}\left[x_M - x_{OD}\right] + C_{44}\left[x_F - x_{OD}\right] \\
&+ \quad C_{46}x_{N+1} + C_{47}x_{N+2} \\
&+ \quad \sum_{\alpha=1}^{20}\left[-u_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathrm{x}) + v_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathrm{x})\right] k_\alpha^{(4)} \quad ,
\end{aligned}
$$

Pág. 340

$$s_{OD} = 1 - s_T - s_L - s_M - s_F,$$

$$s_{it} = \frac{\partial g_K(\mathrm{x}_t|\theta)}{\partial x_i} + e_{it} \quad , \quad t = 1, 2, \ldots, n$$

onde

$$
\begin{aligned}
Cov(e_{it}, e_{jt'}) &= \sigma_{ij} \;\; se \;\; t = t' \;\; e \;\; i \neq j \\
Cov(e_{it}, e_{jt'}) &= 0 \quad se \;\; t \neq t' \\
Var(e_{it}) &= \sigma_{ii} \\
\Sigma &= \sigma_{ij} \;\; positiva\ semidefinida
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{e}'(\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{In})\mathbf{e}$$

Pág. 341

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} \;\; = \;\; &(b_1, b_2, b_3, b_4, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{16}, C_{17}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{26}, C_{27}, C_{33}, \\
&C_{34}, C_{36}, C_{37}, C_{44}, C_{46}, C_{47}, u_{01}, u_{02}, u_{03}, u_{04}, u_{05}, u_{06}, u_{07}, u_{08}, u_{09}, \\
&u_{10}, v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{04}, v_{05}, v_{06}, v_{07}, v_{08}, v_{09}, v_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, \\
&u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{20}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20})' \;\; .
\end{aligned}
$$

Pág. 342

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_T \;=\; & (1,0,0,0,x_T - x_{OD}, x_L - x_{OD}, x_M - x_{OD},\\
& x_F - x_{OD}, x_{N+1}, x_{N+2}, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
& -\sin(x_T - x_L + x_{N+2}), 0, -\sin(x_T - x_M + x_{N+2}),\\
& -\sin(x_T - x_F + x_{N+2}), -\sin(x_T - x_{OD} + x_{N+2}), 0,0,0,\\
& 0,0,\cos(x_T - x_L + x_{N+2}), 0, \cos(x_T - x_M + x_{N+2}),\\
& \cos(x_T - x_F + x_{N+2}), \cos(x_T - x_{OD} + x_{N+2}), 0,0,0,\\
& 0,0,-\sin(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2}), 0, -\sin(x_T - x_M\\
& + x_{N+1} + x_{N+2}), -\sin(x_T - x_F + x_{N+1} + x_{N+2}), -\sin(x_T\\
& - x_{OD} + x_{N+1} + x_{N+2}), 0,0,0,0,0, \cos(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2}),\\
& 0, \cos(x_T - x_M + x_{N+1} + x_{N+2}), \cos(x_T - x_F + x_{N+1} + x_{N+2}),\\
& \cos(x_T - x_{OD} + x_{N+1} + x_{N+2}))' \; .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}_{TL} \;=\; & (0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
& 0,0,0,\cos(x_T - x_L + x_{N+2}), 0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
& \sin(x_T - x_L + x_{N+2}), 0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
& \cos(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2}), 0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
& \sin(x_T - x_L + x_{N+1} + x_{N+2})' \; .
\end{aligned}
$$

Se $i \neq j$ e $i, j \neq OD$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}(\theta) &= 1 + (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\\
(\partial/\partial\theta)\sigma_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_i\\
&\quad -(\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_j \; .
\end{aligned}
$$

Se $i = j$ e $i \neq OD$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ii}(\theta) &= 1 + (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ii}'\theta) - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}\\
(\partial/\partial\theta)\sigma_{ii}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}\mathbf{h}_{ii} - 2(\mathbf{g}_i'\theta)^{-3}(\mathbf{h}_{ii}'\theta)\mathbf{g}_i + (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}\mathbf{g}_i \; .
\end{aligned}
$$

Pág. 343

Se $i = OD$ e $j = T, L, M, F$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}(\theta) &= 1 + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\\
(\partial/\partial\theta)\sigma_{ij}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_S\\
&\quad -(1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{g}_j'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_j \; ,
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{g}_S = \mathbf{g}_T + \mathbf{g}_L + \mathbf{g}_M + \mathbf{g}_F$.

Para $i = j$ e $i = OD$

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(\theta) &= 1 + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ii}'\theta) - (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1} \\ (\partial/\partial\theta)\sigma_{ii}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}\mathbf{h}_{ii} + 2(1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-3}(\mathbf{h}_{ii}'\theta)\mathbf{g}_S \\ &\quad + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}\mathbf{g}_S \ . \end{aligned}$$

$$SE(\hat{\sigma}_{ij}) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta'}\sigma_{ij}(\hat{\theta})\ \hat{\Omega}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma_{ij}(\hat{\theta})\right]^{1/2}$$

Se $i \neq j$ e $i, j \neq OD$

$$\begin{aligned} \eta_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta) + (\mathbf{g}_j'\theta) \\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_j \ . \end{aligned}$$

Se $i = j$ e $i \neq OD$

$$\begin{aligned} \eta_{ij}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ii}'\theta) + (\mathbf{g}_i'\theta) \\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ii}(\theta) &= (\mathbf{g}_i'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ii} - (\mathbf{g}_i'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ii}'\theta)\mathbf{g}_i + \mathbf{g}_i \ . \end{aligned}$$

Pág. 344

Se $i = OD$ e $j = T, L, M, F$

$$\begin{aligned} \eta_{ij}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ij}'\theta) + (\mathbf{g}_j'\theta) \\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ij}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ij} + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ij}'\theta)\mathbf{g}_S + \mathbf{g}_j \end{aligned}$$

Para $i = j$ e $i = OD$

$$\begin{aligned} \eta_{ii}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}(\mathbf{h}_{ii}'\theta) + (1 - \mathbf{g}_S'\theta) \\ (\partial/\partial\theta)\eta_{ii}(\theta) &= (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-1}\mathbf{h}_{ii} + (1 - \mathbf{g}_S'\theta)^{-2}(\mathbf{h}_{ii}'\theta)\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_S \end{aligned}$$

O Desvio Padrão da Elasticidade Cruzada de Preços é calculado por

$$SE(\hat{\eta}_{ij}) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta'}\eta_{ij}(\hat{\theta})\ \hat{\Omega}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\eta_{ij}(\hat{\theta})\right]^{1/2}$$

onde $\hat{\eta}_{ij} = \eta_{ij}(\hat{\theta})$.

$$
\begin{aligned}
\frac{ds_T^*}{dt} &= C_{16}\frac{dx_{N+1}}{dt} + C_{17}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \\
&+ \left\{\sum_{\alpha=1}^{10}\left[-u_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x}) - v_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x})\right] k_\alpha^{(1)}\right\}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \\
&+ \left\{\sum_{\alpha=10}^{20}\left[-u_\alpha \cos(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x}) - v_\alpha \sin(\mathbf{k}'_\alpha \mathbf{x})\right] k_\alpha^{(1)}\right\}\left[\frac{dx_{N+1}}{dt} + \left(\frac{\lambda}{t}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\frac{ds_{OD}^*}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - s_T - s_L - s_M - s_F) = -\left(\frac{ds_T^*}{dt} + \frac{ds_L^*}{dt} + \frac{ds_M^*}{dt} + \frac{ds_F^*}{dt}\right).
$$

Pág. 349

$$
L = \frac{(SSE_{reduzido} - SSE_{completo})/q}{(SSE_{completo})/(4n-p)} \quad ,
$$

$$
L = \frac{(1968.41 - 285.39)/40}{285.39/62} = 9.14 \quad .
$$

Pág. 357

$$
V = C_0 + C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3(D_1 Y) + C_4(D_2 Y) + C_5 Y + erro
$$

onde Y representa o tempo em anos, variando de 1 a 31 e

$$
D_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq Y \leq 13 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}
$$

$$
D_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } 14 \leq Y \leq 18 \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}
$$

Para $1 \leq Y \leq 13$ tem-se o modelo

$$
V_1 = C_0 + C_1 + (C_3 + C_5)Y \quad .
$$

Para $14 \leq Y \leq 18$ tem-se o modelo

$$
V_2 = C_0 + C_2 + (C_4 + C_5)Y \quad .
$$

Para $Y \geq 19$ tem-se o modelo

$$V_3 = C_0 + C_5 Y$$

$$\frac{dV'}{dt} = 2[C_0 + C_1 D_1 + C_2 D_2 + C_3(D_1 Y) + C_4(D_2 Y) + C_5 Y](C_3 D_1 + C_4 D_2 + C_5)$$

Pág. 360

Ano	Coeficientes de Binswanger				
	B_T	B_L	B_M	B_F	B_{OD}