Production, v. 25, n. 1, p. 92-112, jan./mar. 2015
doi: http://dx.doi.org/10.1590/S0103-65132014005000003

Revisão da literatura sobre modelos de Programação por Metas determinística e sob incerteza

Aneirson Francisco da Silva[a*], Fernando Augusto Silva Marins[b]
[a*]aneirson@feg.unesp.br, FEG/UNESP, Brasil
[b]fmarins@feg.unesp.br, FEG/UNESP, Brasil

Resumo

Este trabalho objetivou identificar os principais modelos multiobjetivos da Programação por Metas, ou Goal Programming (GP), analisando as suas vantagens e desvantagens quando utilizados para tratar situações reais, envolvendo problemas complexos de grande porte. Foram tratados tanto modelos da GP determinística, como da GP sob incerteza.

Palavras-chave

Tomada de decisão. Programação por metas. Modelos determinísticos. Modelos sob incerteza.

1. Introdução

Os modelos matemáticos podem ser caracterizados pelas seguintes dicotomias, conforme Goldbarg & Luna (2005): determinístico ou probabilístico, restrito ou irrestrito, monocritério ou multicritério, contínuo ou discreto, unidecisor ou multidecisor, univariável ou multivariável, linear ou não linear e monobjetivo ou multiobjetivo.

Os problemas multicritério podem ser divididos em duas classes: Multiobjetivos e Multiatributos. Nos problemas Multiobjetivos, que podem ser classificados como uma subárea da Programação Matemática, há dois tipos de abordagem, por aglutinação ou por priorização, sendo que ambas utilizam funções escalares por meio das quais as múltiplas funções objetivo são transformadas em uma única função (aglutinada) global (Zeleny, 1973). Nesses problemas, as alternativas para a tomada de decisão são geradas pelo método de solução aplicada (Deb, 2001a; Silva et al., 2013a). Incluem-se nessa categoria os modelos de Programação por Metas (Goal Programming – GP), que serão o foco deste trabalho e que podem adotar ambas as abordagens (Charnes & Cooper, 1961).

Já os problemas Multiatributos podem ser tratados pela Teoria da Utilidade (Utility Theory) e pelos Métodos de Tomada de Decisão por Múltiplos Critérios, como o Analytic Hierarchy Process – AHP, o Analytic Network Process – ANP, o Elimination et Choix Traduisant la Realité – Electre e o Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique – Macbeth, dentre outros (Shimizu, 2010; Saaty, 1977, 2006). De forma geral, nesses problemas as alternativas para a tomada decisão são previamente estabelecidas (Shimizu, 2010).

Tradicionalmente, os analistas utilizam modelos lineares, restritos, monocritérios, contínuos e determinísticos para tratar problemas de decisão. Uma alternativa, bastante comum, é fazer uso de modelos de simulação com eventos discretos e, por meio da análise de cenários, buscar-se encontrar soluções que melhor atendam aos requisitos envolvidos no problema de interesse (Piewthongngam et al., 2009).

Porém, num contexto real, os problemas podem incluir vários objetivos – representando o desempenho de várias áreas/setores/aspectos da empresa objeto do estudo –, quando o interesse dos decisores envolvidos é obter melhorias/ganhos globais para a empresa como um todo, sendo que, muitas vezes, esses objetivos podem ser conflitantes com a existência de *trade-offs* (Deb, 2001b).

Outras dificuldades inerentes à adequada modelagem matemática de problemas reais se

*FEG/UNESP, Guaratinguetá, SP, Brasil
Recebido 25/02/2013; Aceito 14/09/2013

referem à: (i) determinação dos coeficientes das variáveis de decisão nas funções-objetivo – conhecidos como coeficientes de custos; (ii) a determinação dos coeficientes das variáveis de decisão nas restrições do modelo – conhecidos como coeficientes do lado esquerdo (LHS – Left hand side coefficients); (iii) a determinação dos valores das constantes do lado direito das restrições – conhecidos como coeficientes do lado direito (RHS – Right hand side coefficients). Evidentemente, a correta determinação dessas funções e parâmetros é de grande importância para que o modelo tenha uma boa aderência ao problema analisado (Gembicki & Haimes, 1975).

Outra questão é que os modelos matemáticos em geral consideram somente a existência de restrições que sejam rígidas, ou seja, se há restrições no problema que possam ser consideradas flexíveis, no sentido de que aceitam valores próximos aos estabelecidos previamente (conhecidos como Metas) para os seus RHS (Ignizio, 1985), esses modelos precisam de um tratamento diferenciado.

Para permitir a resolução de modelos matemáticos com restrições flexíveis foi proposta por Charnes & Cooper (1961) a Programação por Metas (Goal Programming – GP), que é uma área da Programação Multiobjetivos. Nesse sentido, a GP procura uma melhor solução de compromisso para modelos multiobjetivos frente às metas estabelecidas para os objetivos.

A GP faz isso por intermédio da inclusão de novas restrições do tipo flexível, associadas aos objetivos de interesse, e de variáveis auxiliares, conhecidas como variáveis desvios, relacionadas à obtenção de valores acima ou abaixo das metas e que comporão uma nova função objetivo para modelos de GP (Charnes & Cooper, 1961; Ignizio, 1985; Tamiz et al., 1995, 1998; Romero, 2004; Yaghoobi & Tamiz, 2007; Chang, 2007).

Assim, a GP permite que nem todas as restrições sejam consideradas rígidas ou fixas, o que a faz diferente dos procedimentos da otimização clássica. Essa característica permite que situações frequentemente verificadas na prática, em que os valores dos recursos (RHS) utilizados com a adoção de uma solução são distintos daqueles fixados inicialmente, sejam tratadas por intermédio das variáveis desvio incorporadas à modelagem de GP. Além disso, a GP, em conjunto com a teoria Fuzzy, permite o tratamento de ocorrência de incerteza nos parâmetros de entrada dos modelos (Aouni et al., 2009; Yaghin et al., 2012).

Destaca-se que a GP gerou grande interesse dos pesquisadores, sendo que o primeiro artigo a apresentar uma perspectiva ampla do seu uso (aspectos teóricos e práticos) foi desenvolvido por Kornbluth (1973) e, conforme Caballero et al. (2009), dentre uma série de publicações relacionadas à GP, os livros de Ijiri (1965), Lee (1972) e Ignizio (1976) podem ser considerados textos clássicos.

De fato, um grande número de trabalhos sobre GP tem surgido na literatura científica, podendo ser citados: Ignizio (1978), Zanakis & Gupta (1985), Romero (1986), Saber & Ravindran (1993) – para o caso não linear, Schniederjans (1995), Tamiz et al. (1995, 1998), Lee & Olson (1999), Aouni & Kettani (2001), Jones & Tamiz (2002), Uría et al. (2002), Caballero et al. (2009), Silva (2009, 2013), Silva et al. (2010a, b, 2011a, b, 2012b, c, 2013a, b), Ustun (2012) e Bankain-Tabrizi et al., (2012).

Um artigo recentemente publicado que atualiza a pesquisa de Kornbluth (1973) até 2009, e o de Caballero et al. (2009). Esses autores consultaram importantes periódicos internacionais, a saber: *European Journal of Operational Research*; *Journal of the Operational Research Society*; *Computers and Operations Research*; *Computers and Industrial Engineering*; *Omega*; *Fuzzy Sets and Systems*; *Socio-Economic Planning Sciences*; *International Journal of Production Research*; *International Journal of Production Economics*; *Applied Mathematics and Computation*; *Journal of Multicriteria Decision Analysis*; *Annals of Operations Research*; *INFOR*; *Agricultural Systems*; *Management Science*; *International Journal of Systems Science*; *Applied Mathematics and Computation*; *IIE Transactions Institute of Industrial Engineers*; *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* e *Mathematical and Computer Modelling.*

No referido artigo, os autores apresentam resultados de uma *survey* sobre a GP, investigando os problemas e os tipos de variáveis aos quais ela se aplica, mostrando que os modelos de GP são utilizados com maior frequência em problemas industriais, seguidos por aplicações nas áreas de recursos naturais e de negócios.

Outra informação da pesquisa desses autores foi a identificação de quais modelos os pesquisadores utilizam com maior frequência: Weighted Goal Programming – WGP; Lexicographic Goal Programming – LGP e Minmax Goal Programming – MA. Tal cenário ainda permanece, principalmente nos modelos que incorporam as incertezas, que serão descritos nas próximas seções.

Também foram investigadas as características de problemas aos quais se aplicam modelos de GP, concluindo-se que há maior ocorrência de problemas lineares com variáveis binárias, inteiras e em conjunto com a teoria Fuzzy. Cabe acrescentar que Caballero et al. (2009) não fazem menção aos novos modelos de GP sob incerteza, apenas à GP com a teoria Fuzzy.

Dada a importância da GP, neste trabalho o objetivo geral foi identificar os principais modelos determinísticos e sob incerteza da GP, procurando apontar vantagens e desvantagens de sua aplicação a problemas complexos (de grande porte) de decisão. Como objetivo específico, este artigo pretendeu complementar o trabalho de Caballero et al. (2009), investigando nas principais bases de dados nacionais e internacionais as publicações que tenham se traduzido em avanços teóricos e práticos da GP.

Para atingir tais objetivos, foram realizadas consultas no Portal de Periódicos da Capes, bem como nos anais dos principais congressos nacionais da área de ENG III, utilizando as palavras-chave: Goal Programming; Programação por metas; Programação de metas; e Otimização multiobjetivos. Os resultados relativos às publicações em GP nos periódicos nacionais estão no Tabela 1.

Constatou-se, conforme Tabela 1, que apenas a revista *Gestão & Produção* possui publicações de GP, sendo cinco as publicações no período de 2002 a 2012. Incluiu-se nesse levantamento o trabalho de Paiva & Morabito (2011), que aplicaram um modelo de otimização Estocástica Robusta, com conceitos de GP em sua estrutura algébrica.

Segundo Kouvelis & Yu (1997), a Programação Robusta trata os parâmetros incertos por meio de cenários discretos, tendo por objetivo encontrar uma solução que ofereça uma proteção na ocorrência do pior cenário possível. Mais precisamente, busca-se uma solução que minimize o desvio máximo com relação à solução ótima que seria obtida considerando-se todas as possibilidades de valores dos dados aleatórios. Vários critérios podem ser adotados para escolher entre soluções (decisões) robustas, que dependem da especificidade da situação, como exemplo, Kouvelis & Yu (1997) estudaram três tipos de critérios de robustez: robustez absoluta (*absolute robustness*), desvio robusto (*robust deviation*) e a robustez relativa (*relative robustness*).

Nesse contexto, Mulvey et al. (1995) incorporam o conceito de solução robusta – que permanece próxima às soluções ótimas para todos os cenários considerados – e o conceito de modelagem robusta – que gera soluções factíveis ou quase factíveis em todos os cenários analisados. Para Paiva (2009), a principal contribuição da Programação Robusta é a inclusão de penalidades para prevenir a violação das restrições nos diferentes cenários, bem como permitir a flexibilização da função objetivo, de forma a contemplar diferentes critérios de otimização.

Tabela 1. Panorama nacional sobre aplicações de GP.

Revista	Autores
Gestão & Produção	Munhoz & Morabito (2001) Cunha & Caixeta Filho (2002) Munhoz & Morabito (2010) Paiva & Morabito (2011) Abensur (2012)

A Programação Estocástica trata de problemas de otimização com parâmetros que assumem uma distribuição de probabilidades contínua ou discreta e pode ser dividida em:

- Modelos de recurso (*resource models*) – essa abordagem foi desenvolvida por Dantzig (1955) e Beale (1955) para problemas de otimização estocástica de dois estágios, conforme abordado nos trabalhos de Paiva (2009) e Paiva & Morabito (2011).
- Modelos probabilísticos (*chance-constrained programming*) – desenvolvidos por Charnes & Cooper (1959), permitem que algumas restrições do segundo estágio sejam expressas em termos de declarações probabilísticas sobre as decisões de primeiro estágio.

Para detalhes recomenda-se a leitura dos trabalhos de Sahinidis (2004), Paiva (2009), Munhoz & Morabito (2012), Mulvey et al. (1995), Ben-Tal & Nemirovski (1998, 2000), Bertsimas & Sim (2003) e Bertsimas & Thiele (2006).

Da mesma forma, foram consultados os anais dos principais congressos da área de ENG III: ENEGEP – Encontro Nacional de Engenharia de Produção, SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional e SIMPEP – Simpósio de Engenharia de Produção. Como resultados, tem-se que:

- Nos anais dos ENEGEP, para o período de 1996 a 2012, foram encontrados três artigos: Silva et al. (2011a, b, 2012b);
- Nas edições dos SBPO da última década foram encontrados três artigos: Marins et al. (2010), Silva et al. (2011c, 2012a);
- Nos anais dos SIMPEP, para o período de 1999 a 2012, foram encontrados dois artigos: Silva et al. (2009, 2012c);
- Nos anais do ERPO – Encontro Regional de Pesquisa Operacional, encontrou-se o artigo de Silva et al. (2010b), que trabalharam com um modelo de GP multiescolhas revisado.

Pode-se concluir, a partir do Tabela 1 e dos resultados das consultas aos anais de eventos nacionais, que os modelos de GP são pouco aplicados no contexto brasileiro.

Cabe desenvolver uma nova pesquisa para investigar as razões para tal, pois a GP se reveste de importância ao permitir a modelagem de situações de muito interesse e de dificuldade de tratamento analítico, considerando modelos multiobjetivos que, segundo Deb (2001a), são os mais comuns em problemas reais de decisão.

Com respeito aos artigos internacionais enfocando a GP, constatou-se, com base em consultas nas principais bases de dados da CAPES, que o cenário atual é diferente daquele retratado por Caballero et al. (2009). De fato, há uma maior tendência de aplicações dos modelos de GP sob incerteza (Multi-Choice, Multi-Segment, Multi-Choice Revised e Revised Multi-Segment, Multi-Coefficientes GP) combinados com a teoria Fuzzy, com variáveis inteiras e binárias, e com aplicações em Logística e Planejamento da Produção, conforme pode ser verificado em Chen & Xu (2012), Chang (2007, 2008, 2010), Liao (2009) e Silva, Silva et al. (2013a), dentre outros.

Sobre os aspectos metodológicos deste trabalho, pode-se classificá-lo, quanto à natureza, como pesquisa básica (Appolinário, 2006). Quanto aos objetivos, a pesquisa é exploratória, pois propicia maior familiaridade com o problema, para torná-lo mais explícito (Gil, 2009). Com respeito à abordagem, pode-se classificá-la como qualitativa, sendo o método de pesquisa o teórico-conceitual, utilizando-se a pesquisa bibliográfica como instrumento principal (Gil, 2009).

O artigo está assim organizado: a seção 1 contemplou uma breve introdução sobre a importância da GP, bem como possíveis lacunas nas pesquisas; já na seção 2 estão descritos e comentados os principais modelos determinísticos da GP; na seção 3 são abordados os modelos de GP que permitem a ocorrência de incertezas nos seus parâmetros de entrada e nas metas estabelecidas para os múltiplos objetivos envolvidos; finalizando, na seção 4, com as conclusões, seguidas das referências consultadas.

2. Programação por Metas (Goal Programming) determinística

Em geral, nos modelos determinísticos da Pesquisa Operacional (PO) assume-se que os dados coletados sejam confiáveis, mesmo que se tratem de informações que possam apresentar incertezas inerentes à sua natureza, como, por exemplo: custos de matéria-prima e previsões de demanda ou de vendas.

Nesses modelos, como uma simplificação, considera-se que a informação necessária para análise mantenha-se próxima aos valores obtidos na coleta de dados, no período em que será tomada a decisão, a partir dos resultados do modelo (Sen & Higle, 1999).

Como um recurso para discutir as implicações de possíveis alterações nesses dados na solução obtida, é comum utilizar as técnicas da Análise Sensibilidade e da Análise Paramétrica (Pizzolato & Gandolpho, 2012).

Conforme se verifica em Tamiz et al., (1995, 1998), Yaghoobi & Tamiz (2007), Chang (2007, 2008), Liao (2009), Caballero et al. (2009), e Jamalnia & Soukhakian (2009), os principais enfoques determinísticos da Programação por Metas (Goal Programming) são:

- **Programação por Metas ponderada** (Weighted Goal Programming – WGP): foi a primeira proposta desenvolvida, em que se atribuem pesos para as variáveis desvios (para mais ou para menos) com relação às metas estabelecidas para os objetivos;
- **Programação por Metas com priorização** (Lexicographic Goal Programming – LGP): também conhecida por Preemptive Goal Programming, nela os objetivos são ordenados de acordo com sua importância, a partir de uma priorização (hierarquização) feita pelos decisores a priori;
- **Programação por Metas Minmax** (Minmax Goal Programming – Minmax GP): aqui se trabalha com as funções de realização que consideram a soma das variáveis desvio;
- **Programação por Metas estendida** (Extended Goal Programming – EGP): é uma combinação convexa da WGP, da LGP e da Minmax GP;
- **Programação por Metas inteira** (Integer Goal Programming – IGP): há a atribuição de funções de penalidade;
- **Programação por Metas binária** (Binary Goal Programming – BGP): há variáveis inteiras binárias associadas à realização ou não das metas estabelecidas para os objetivos;
- **Programação por Metas e Análise por Envoltória de dados** (Goal Programming and Data Envelopment Analysis – GPDEA): desenvolvida para, nas aplicações da DEA, melhorar a discriminação de Unidades Tomadoras de Decisão (Decision Making Units – DMUs), quando o número de DMUs é inferior ao número total de variáveis de entrada e saída do modelo.

Destaca-se que, conforme Yaghoobi & Tamiz (2007), Romero (2004), Jamalnia & Soukhakian (2009), e Caballero et al. (2009), os três tipos de modelos de GP determinística mais utilizados por pesquisadores (desenvolvimentos teóricos) e tomadores de decisão (aplicações reais) são: Modelos WGP, LGP e Minmax GP. Exemplos de uso desses modelos podem ser encontrados em várias publicações como: Tamiz et al., (1995, 1998), Jones & Tamiz (2002), Jones & Barnes (2000), Romero (2001, 2004), Chang (2004), Aouni, Aouni et al. (2009), Chang (2007, 2008, 2010) e

Caballero et al. (2009), Chang et al. (2012a, b) e Chang & Lin (2009).

Passa-se, na sequência, a apresentar e comentar cada um desses modelos da GP determinística.

2.1. *Programação por Metas ponderada – WGP*

Nos modelos WGP, as variáveis de desvio apresentam hierarquias equivalentes, sendo a atribuição de pesos a esses desvios o que distinguirá os objetivos (que podem ser conflitantes) mais importantes.

Os decisores têm papel importante, pois precisam estimar os pesos de forma que grande parte dos objetivos seja satisfeita. Como na WGP pode ocorrer certo subjetivismo na estimação, um método que tem sido adotado em várias oportunidades para a priorização de objetivos é o Analytic Hierarchy Process – AHP, proposto por Saaty (1977).

Segundo Martel & Aouni (1998), o modelo original WGP, criado por Charnes & Cooper (1961), pode ser descrito pelas expressões de (1) a (4):

$$Min \sum_{i=1}^{n} (W_i^+ d_i^+ + W_i^- d_i^-) \quad (1)$$

s.a:

$$x \in F,\ d_i^- \geq 0,\ d_i^+, d_i^- \geq 0, d_i^+ . d_i^- = 0, \quad i = 1,2,...,n. \quad (2)$$

$$Ax \leq c \quad (3)$$

$$x_i, d_i^+, d_i^- \geq 0, d_i^+ . d_i^- = 0, \quad i = 1,2,...,n. \quad (4)$$

sendo $f_i(x)$ as múltiplas funções objetivo e x o vetor das variáveis de decisão do modelo x_i; d_i^+ e d_i^-, as variáveis auxiliares de desvio para mais e para menos, vinculadas a cada meta g_i estabelecida para cada objetivo i; W_i^+ e W_i^-, os pesos atribuídos, respectivamente, às variáveis de desvio d_i^+ e d_i^-; A e c, respectivamente, a matriz dos coeficientes do lado esquerdo (LHR) das variáveis e o vetor de constantes do lado direito (RHS), nas restrições rígidas do modelo original.

Observa-se que, pela restrição (4), o produto das variáveis de desvio deve ser zero, ou seja, apenas uma delas pode ter valor diferente de zero.

O modelo WGP também é utilizado na GP sob incerteza e na GPDEA, como será comentado adiante.

Outro fato que merece destaque é a possibilidade de existir incomensurabilidade (diferentes unidades de medida) entre os objetivos. Tal situação pode ser contornada, conforme citado por Tamiz et al. (1995), com o uso de métodos de normalização, como, por exemplo, a normalização euclidiana e a percentagem normalizada, descrita no trabalho de Ahern & Anandarajah (2007), dentre outros.

2.2. *Programação por Metas com priorização – LGP*

Na LGP, a cada objetivo é atribuído a priori pelo decisor um nível de prioridade. Nesse caso, considerando-se as prioridades (ou níveis) P_1, P_2, P_3, ..., P_n, com $P_1 > P_2 > P_3 > P_n$, e se cada objetivo i será otimizado (individualmente) seguindo a ordenação natural, ao se otimizar o objetivo associado à prioridade $P_{i+1,}$ incorpora-se uma nova restrição no modelo, no qual o objetivo associado à prioridade P_i é mantido no seu valor ótimo (obtido na etapa anterior de otimização). De acordo com Chang (2007), o modelo matemático da LGP pode ser expresso por:

$$Lex\ Min \begin{pmatrix} \sum_{i \in h_1} (\alpha_i d_i^+ + \beta_i d_i^-), ..., \sum_{i \in h_r} (\alpha_i d_i^+ + \chi_i d_i^-), ..., \\ \sum_{i \in h_Q} (\alpha_i d_i^+ + \beta_i d_i^-) \end{pmatrix} \quad (5)$$

s.a:

$$f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = g_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad i \in h_r\ com\ r = 1, 2, ..., Q \quad (6)$$

$$d_i^+ . d_i^- = 0,\ i = 1, 2, ..., n \quad (7)$$

$$X \in F\ (F \text{ é um conjunto viável}),\ d_i^+,\ d_i^- \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n \quad (8)$$

sendo f_i e g_i, respectivamente, a i-ésima função objetivo e a i-ésima meta do modelo original; h_r, a hierarquia estabelecida para as funções objetivo, alocadas ao r-ésimo nível de prioridade; d_i^+ = Max (0, $f_i(X)$ - g_i) e d_i^- = Max (0, g_i - $f_i(X)$), os desvios para mais e para menos no alcance da meta do i-ésimo objetivo; α_i e β_i, os pesos associados aos desvios (variáveis auxiliares), respectivamente para mais ou para menos dos valores das metas; e demais variáveis sendo análogas às do modelo WGP.

2.3. *Programação por Metas Minmax – Minmax GP*

Em muitos problemas de decisão há uma série de objetivos para os quais é difícil o estabelecimento de metas, como o crescimento da empresa e o lucro no longo prazo, dentre outros, sendo possível, nesse contexto, adotar-se o Minmax GP.

No Minmax GP os gestores, frente à dificuldade de se estabelecer um valor de meta para cada objetivo, preferem identificar intervalos onde esses objetivos possam variar entre valores mínimos e valores máximos.

O método procura, dependendo do tipo de objetivo envolvido, minimizar o limitante superior (ou o valor máximo, como no caso de um objetivo envolvendo custos) ou maximizar o limitante inferior (ou o valor mínimo, como no caso de um objetivo envolvendo lucros) do intervalo identificado pelo gestor.

A formulação geral do modelo, segundo Romero (2004), pode ser expressa por (9) a (12), nas quais algumas variáveis e parâmetros são semelhantes aos dos modelos anteriores:

$$Min\ D \tag{9}$$

$$\left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right) - D \le 0 \tag{10}$$

s.a:

$$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

$$x \in F,\ d_i^- \ge 0,\ d_i^+, d_i^- \ge 0, d_i^+.d_i^- = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Quanto mais próximo de zero estiver o valor de *D* melhor, pois significa que a maioria dos objetivos estabelecidos foi atendida plenamente.

Conforme as expressões (9) a (12), o modelo Minmax GP fornece uma solução que dá a máxima importância para o objetivo mais deslocado em relação à sua meta, gerando uma solução mais equilibrada na satisfação dos diferentes objetivos (Romero, 2001).

Há outras modelagens que podem ser classificadas como GP Minmax na literatura, devendo ser citada a importante contribuição, para aplicações em Engenharia, do trabalho de Gembicki & Haimes (1975), que desenvolveram o Método para Atingimento de Metas (Goal Attainment Method).

Existem outras formas possíveis de função objetivo (também denominada função de realização) para esse modelo, mas que, segundo a literatura consultada, têm sido pouco adotadas. Esse ponto é importante, pois os resultados obtidos são, geralmente, muito sensíveis ao tipo de função objetivo escolhida. Por conseguinte, uma função de realização errada, ou mal estruturada, pode não refletir as preferências do decisor (Ogryczak, 2001).

Ogryczak (2001) propôs a integração de modelos Minmax GP e LGP, tendo sugerido a formulação dada por (13) a (16):

$$\text{Min } (\mathrm{D}_1, \ldots, D_r, \ldots, D_Q) \tag{13}$$

s.a:

$$\left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right) - D \le 0, \quad i \in h_r,\ r \in \{1, 2, \ldots, Q\} \tag{14}$$

$$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = g_i \quad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{15}$$

$$x \in F,\ d_i^- \ge 0,\ d_i^+, d_i^- \ge 0, d_i^+.d_i^- = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{16}$$

A função de realização (13) também reflete a minimização do desvio máximo, de modo que a maior parte dos objetivos é plenamente satisfeita quanto menor for o valor de *D.* A diferença do modelo (13) a (16) em relação ao modelo expresso por (9) a (12) está no fato de que se pode realizar a otimização de forma sequencial, isto é, hierarquizando-se os objetivos em função de sua importância. Contudo, tal processo faz com que o custo computacional aumente e esse modelo seja pouco recomendado para aplicações reais de GP.

2.4. *Programação por Metas estendida – EGP*

O modelo de EGP foi proposto por Romero (2001) e a ideia dos autores foi obter um modelo que fosse uma combinação convexa do WGP, do LGP e do Minmax GP, a fim de melhor equilibrar a solução fornecida (Romero, 2004). Dessa forma, o modelo de EGP pode ser expresso por (17) a (20):

$$\text{Min } (1-\lambda) D + \lambda \sum_{i=1}^{q} \left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right) \tag{17}$$

s.a:

$$\left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right) - D \le 0 \tag{18}$$

$$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = g_i, \qquad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{19}$$

$$x \in F,\ d_i^- \ge 0,\ d_i^+, d_i^- \ge 0,\ d_i^+.d_i^- = 0, \lambda \in [0,\ 1] \tag{20}$$

O parâmetro λ possibilita obter combinações convexas entre os modelos WGP, LGP e Minmax GP. Observe-se que para λ = 0 tem-se a função de realização do Minmax GP e para λ = 1 tem-se a função de realização do WGP ou do LGP.

Para outros valores de λ no intervalo [0, 1] tem-se soluções intermediárias, fornecidas pela combinação de WGP e Minmax GP (Extended Weighted Goal Programming – EGP) ou, no caso da combinação de LGP e Minmax GP (Extended Lexicographic Goal Programming – ELGP) (Romero, 2004).

O modelo ELGP pode ser formulado por (21) a (24), conforme Romero (2001):

$$\text{Lex Min} \begin{bmatrix} (1-\lambda_1) D_1 + \lambda_1 \sum\limits_{i \in h_1}^{q} \left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right), \ldots, \\ (1-\lambda_r) D_r + \lambda_r \sum\limits_{i \in h_r}^{q} \left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right), \ldots, \\ (1-\lambda_Q) D_Q + \lambda_Q \sum\limits_{i \in h_Q}^{q} \left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right). \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\left(\alpha_i d_i^- + \beta_i d_i^+\right) - D_i \le 0,\ \ i \in h_r,\ \ r \in \{1,\ldots,Q\} \quad (22)$$

$$f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = g_i \ \ i \in \{1,\ldots,n\} \quad (23)$$

$$x \in F,\ d_i^- \ge 0,\ d_i^+, d_i^- \ge 0, d_i^+.d_i^- = 0,\ \lambda_r \in [0,\ 1] \quad (24)$$

De acordo com Romero (2004), é possível demonstrar, por meio de especificações de diferentes valores para λ, que a formulação ELGP pode levar a diferentes soluções ótimas. Esse autor propôs a agregação de intervalos para as metas e a inclusão de funções de penalidade, visando incorporar maior sensibilidade ao modelo (Chang & Lin, 2009). Essas formulações não serão detalhadas aqui, entretanto as características desses modelos podem ser encontradas em Romero (2004).

Uma aplicação real do modelo ELGP, que permite uma combinação convexa entre os três principais modelos de GP determinística, foi realizada em problemas sucroalcooleiros de grande porte, visando minimizar o custo total agroindustrial e maximizar a produção de açúcar e álcool (Marins et al., 2011). Naquele trabalho, em especial, percebeu-se que ao variar o parâmetro λ obtinham-se diferentes soluções e, com isso, foi possível realizar uma análise mais acurada sobre o problema estudado, identificando-se quais objetivos eram mais conflitantes.

2.5. *Programação por Metas inteira – IGP*

O modelo IGP é utilizado em situações onde há variáveis que devem assumir valores discretos, como, por exemplo, no planejamento da produção e em alguns problemas de distribuição, dentre outros. Na proposta de Jones et al. (2002), essa situação se reflete no modelo dado por (25) a (29):

$$Min\ \sum_{i=1}^{n}\left(u_i d_i^- + v_i d_i^+\right) \quad (25)$$

s.a:

$$f_i(\mathrm{x}) + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \quad (26)$$

$$\mathrm{x} \in C_s \quad (27)$$

$$d_i^-, d_i^+ \ge 0, d_i^-.d_i^+ = 0 \quad (28)$$

$$L \le x \le U, \text{inteiros.} \quad (29)$$

sendo u_i e ν_i os pesos escolhidos para os desvios; C_s, o conjunto de restrições rígidas (não podem ser violadas); *L* e *U*, respectivamente, os vetores com os limitantes inferiores e superiores das variáveis de decisão, que devem ser estipulados pelos gestores visando à estimação de faixas aceitáveis para a variação discreta das variáveis de decisão.

Esse modelo parece similar ao descrito na seção 2.1, porém os artigos consultados tratam os modelos de forma distinta, conforme Chang (2007, 2008) e Caballero et al. (2009), Chang et al. (2012a, b) e Silva et al. (2013a, b).

2.6. *Programação por Metas binária – BGP*

Chang (2004, 2007) apresentou o modelo BGP com o intuito de resolver problemas de decisões em que alguns dos objetivos podem ser cumpridos e outros, eventualmente, não. Nesse caso há necessidade de serem incorporadas ao modelo variáveis binárias que representem essa possibilidade de cumprir ou não um dado objetivo. O modelo BGP (não linear) é expresso por (30) a (34):

$$Min \sum_{i=1}^{n}\left(d_i^+ + d_i^-\right) y_i \quad (30)$$

s.a:

$$(f_i(X) - g_i) y_i = d_i^+ - d_i^-, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (31)$$

$$d_i^+, d_i^- \ge 0\ , d_i^+.d_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (32)$$

$$y_i \in R_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (33)$$

$$X \in F \quad (34)$$

sendo y_i a variável de controle binário para *i*-ésimo objetivo; e R_i o seu domínio associado à quantidade de metas que os gestores desejam satisfazer plenamente, e *F* é o conjunto de soluções viáveis.

Dada a dificuldade inerente de se tratar modelos não lineares [ver equações (30 e 31)] e com variáveis binárias, Chang (2000) propôs um modelo linear, dado por (35) a (46), como alternativa:

$$Min \sum_{i=1}^{n} z_i^+ + z_i^- \quad (35)$$

s.a:

$$h_i(X) - k_i = d_i^+ - d_i^-, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad (36)$$

$$d_i^+ + \left(y_i - 1\right) M \le z_i^+ \le \left(1 - y_i\right) M + d_i^+, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad (37)$$

$$z_i^+ \le y_i M, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad (38)$$

$$d_i^- + (y_i - 1)M \le z_i^- \le (1 - y_i)M + d_i^-, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{39}$$

$$z_i^- \le y_i M, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{40}$$

$$f_i(X) + (y_i - 1)M \le h_i(X) \le (1 - y_i)M + f_i(X), \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{41}$$

$$h_i(X) \le y_i M, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{42}$$

$$k_i = g_i y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{43}$$

$$y_i \in R_i \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{44}$$

$$X \in F\ (F \text{ é um conjunto de soluções viáveis}) \tag{45}$$

$$d_i^+, d_i^-, z_i^+, z_i^- \ge 0, d_i^+ . d_i^- = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{46}$$

sendo M um valor suficientemente grande; z_i^+, z_i^-, variáveis auxiliares; e $h_i(X) = f_i(X)y_i$. Apesar de linear, esse modelo não se mostrou interessante para aplicações em problemas de grande porte, pois impõe que o decisor deva, a priori, escolher quais objetivos dentre os envolvidos no modelo se buscará satisfazer.

Isso dificulta a otimização, pois pode haver muitas possibilidades de combinações de objetivos prioritários e, quanto mais próximo o valor de R_i estiver da quantidade total de objetivos existentes, maior será o custo computacional.

Como alternativas ao BGP, há outros modelos mais simples para tratar situações em que alguns dos objetivos podem ser cumpridos e outros não. Os seguintes modelos, eventualmente, podem ter melhor desempenho computacional que o BGP:

- O modelo LGP, em que o decisor pode otimizar de forma sequencial seus objetivos;
- O modelo WGP, com a atribuição de pesos;
- O modelo Minmax GP;
- Os modelos estendidos.

Dessas opções, para problemas de grande porte, recomenda-se o Minmax GP, pois não há a necessidade da escolha da importância relativa dos objetivos, o que facilita bastante a otimização e reduz consideravelmente o custo computacional.

2.7. *Programação por Metas e Análise por Envoltória de Dados – GPDEA*

Conforme apontado por Athanassopoulos (1995), a Análise por Envoltória de Dados (Data Envelopment Analysis – DEA) tem sido tradicionalmente utilizada em problemas de decisão multicriterial envolvendo entidades – conhecidas como Unidades Tomadoras de Decisão (Decision Making Units – DMUs) – similares, com os mesmos tipos de entradas/insumos (*inputs*) e saídas/produtos (*outputs*) e onde se deseja obter informações acerca do desempenho (eficiência) relativa das DMUs.

Os modelos tradicionais da DEA são:

- Modelo com Retorno Constante de Escala (Constant Scale Return) ou Modelo CCR, em homenagem aos seus idealizadores, já que foi proposto por Charnes et al. (1978).
- Modelo com Retorno Variável de Escala (Variable Scale Return) ou Modelo BCC, em homenagem aos seus idealizadores, já que foi proposto por Banker et al. (1984).

Um aspecto de interesse é que esses modelos CCR e BCC não conseguem oferecer uma boa discriminação quando o número de DMUs não é pelo menos três vezes maior que a soma do número de variáveis *inputs* e *outputs* (Peterson, 1993; Cooper et al., 2006, 2007).

Para tentar utilizar a GP para atenuar tal dificuldade dos modelos DEA, Athanassopoulos (1995) propôs um modelo conhecido por Goal Programming & Analysis Envelopment Analysis (GODEA), no qual se inseriram valores de metas para as DMUs. Esse modelo mostrou-se muito complexo e de difícil compreensão, o que dificulta sua implementação e, na prática, limita sua utilização.

Nessa mesma linha, Bal et al. (2010), baseados no modelo de Li & Reeves (1999) apresentado adiante, propuseram modelos de GPDEA para avaliar a eficiência de DMUs.

As expressões (47) a (53) descrevem o modelo multiobjetivo para a DEA, proposto por Li & Reeves (1999):

$$\begin{aligned} &Min \left(\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \right) \\ &Min \quad M \\ &Min \sum_{j=1}^{n} d_j \end{aligned} \tag{47}$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 \tag{48}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{49}$$

$$M - d_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{50}$$

$$u_r \ge 0, \quad r = 1,2,\ldots,s. \tag{51}$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m. \tag{52}$$

$$d_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n. \tag{53}$$

sendo *j* o índice das DMUs; *i*, o índice das variáveis de entrada; *r*, o índice das variáveis de saída; v_i, o peso associado à *i*-ésima entrada; u_r, o peso associado à *r*-ésima saída; y_{r0} e x_{io},os coeficientes das matrizes de dados de entradas e saídas para a DMU_0 (em análise); d_o, a variável de desvio para a DMU_0; y_{rj} e x_{ij}, os coeficientes das matrizes de dados de entradas e saídas para a DMU*j*; d_j, a variável de desvio para a DMU_j; e *M*, o valor máximo admitido para as variáveis de desvio ($M = \max \{d_j\}$).

Bal et al. (2010) associaram metas às três funções objetivo do modelo de Li & Reeves (1999) e propuseram os modelos GPDEA-CCR, conforme (54) a (62) e GPDEA-BCC, conforme (63) a (72), respectivamente: sendo d_1^-, d_1^+ as variáveis de desvio indesejáveis para a meta que restringe a soma ponderada das entradas ao valor de 1 (100%); d_2^+, a variável de desvio indesejável para a meta que restringe a soma ponderada das saídas a ser menor ou igual a 1 (100%); d_2^-, a variável de desvio desejável para a meta que restringe a soma ponderada das saídas a ser menor ou igual a 1 (100%); M, o desvio máximo; d_{3j}^-, a variável de desvio indesejável da DMU_j para a meta que tem *M* como o desvio máximo; d_{3j}^+, a variável de desvio desejável da DMU_j para a meta que tem *M* como o desvio máximo.

GPDEA-CCR

$$Min \left(d_1^- + d_1^+ + d_2^+ + \sum_{j=1}^{n} d_{3j}^- + \sum_{j=1}^{n} d_j \right) \tag{54}$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + d_1^- - d_1^+ = 1 \tag{55}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} + d_2^- - d_2^+ = 1 \tag{56}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + d_j = 0, \quad j = 1,2,...,n \tag{57}$$

$$M - d_j + d_{3j}^- - d_{3j}^+ = 0, \quad j = 1,2,...,n \tag{58}$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1,2,...,s. \tag{59}$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m. \tag{60}$$

$$d_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n. \tag{61}$$

$$d_i \geq 0, \quad d_{3j}^-, d_{3j}^+ \geq 0, d_i^+ . d_i^- = 0. \tag{62}$$

GPDEA-BCC

$$Min \left(d_1^- + d_1^+ + d_2^+ + \sum_{j=1}^{n} d_{3j}^- + \sum_{j=1}^{n} d_j \right) \tag{63}$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + d_1^- - d_1^+ = 1 \tag{64}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} + c_0 + d_2^- - d_2^+ = 1 \tag{65}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + c_0 + d_j = 0 \quad j = 1,2,...,n \tag{66}$$

$$M - d_j + d_{3j}^- - d_{3j}^+ = 0, \quad j = 1,2,...,n \tag{67}$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1,2,...,s. \tag{68}$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m. \tag{69}$$

$$d_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n. \tag{70}$$

$$d_i \geq 0, \; d_i^+ . d_i^- = 0 \tag{71}$$

$$d_{3j}^-, d_{3j}^+ \geq 0, \text{Co Livre.} \tag{72}$$

Mais detalhes sobre os modelos CCR, BCC e GPDEA-CCR e GPDEA-BCC podem ser encontrados em: Charnes et al. (1978, 1990), Wong & Beasley (1990), Baker & Talluri (1997), Sueyoshi (1999), Adler et al. (2002), Cooper (2005), Wang & Luo (2009) e Bal et al. (2008).

Um relato de experiência prática de GPDEA está em Silva et al. (2011a), que aplicaram o modelo para a seleção eficiente de variedades de cana para plantio para uma usina de açúcar e álcool brasileira. Nesse trabalho, os autores analisaram, a partir das variedades de cana de que a usina dispunha para o plantio, quais variedades deveriam ser plantadas, considerando como variáveis de entrada: a resistência a pragas, as exigências de solo e o tempo de corte; e como variáveis de saída: a taxa de produtividade de cana por hectare e a taxa de *pol* (quantidade de sacarose) da cana por hectare.

Outra utilização de GPDEA está relatada em Silva et al. (2012b, 2013a), que aplicaram esse modelo para avaliar a eficiência de múltiplas plantas mundiais de manufatura de uma empresa multinacional do segmento de autopeças. Tal aplicação demonstrou a superioridade do modelo GPDEA em relação aos modelos clássicos da DEA na discriminação das plantas realmente eficientes da empresa.

Já Silva et al. (2012c) utilizaram a GPDEA para avaliar a eficiência da contratação de processos licitatórios de embarcações da Petrobras, sendo que os resultados obtidos mostraram-se aderentes aos resultados obtidos pela empresa e permitiram uma discriminação mais confiável entre as DMUs.

Não foram encontradas outras aplicações da GPDEA no contexto internacional, tendo sido consultadas nessa pesquisa as bases de dados do Science Direct, da Elsevier, da Scopus e da Web of Knowledge, dentre outras.

A teoria de conjuntos Fuzzy vem sendo usada como técnica que tem como objetivo modelar a incerteza nos modelos DEA (Lertworasirikul et al., 2003). Já Hatami-Marbini et al. (2011) elencaram as principais abordagens que tratam da modelagem Fuzzy DEA:

- Abordagem pela tolerância (The tolerance approach);
- Abordagem baseada no nível α (The α-level based approach);
- Abordagem por ranqueamento Fuzzy (The Fuzzy ranking approach);
- Abordagem baseada em possibilidades (The possibility approach).

Esses autores identificaram que a abordagem baseada no nível α é o modelo mais popular de Fuzzy DEA, fato confirmado pelo grande número de publicações. Dessa forma, uma lacuna que pode ser explorada é a incorporação da lógica Fuzzy nos modelos GPDEA, por meio dessa abordagem baseada no nível α.

Para mais detalhes sobre a abordagem α-*level* recomenda-se a leitura de Kao & Liu (2000).

2.8. *Programação por Metas não linear – NLGP*

Para Zheng et al. (1996), o modelo NLGP é útil para resolver problemas multicritérios, envolvendo objetivos e restrições não lineares. De acordo com Abdelaziz et al. (2007) e Bravo & Gonzalez (2009), trata-se de uma poderosa técnica para resolver problemas não lineares de otimização multiobjetivo e com aplicação em vários problemas reais. A seguir apresenta-se a formulação matemática do modelo NLGP proposta por Zheng et al. (1996) e Powell e Premachandra (1998):

$$\text{Lex min}\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=m_i+1}^{m}\left(w_{i1}^{-}d_i^{-}+w_{i1}^{+}d_i^{+}\right),\ \sum_{i=m_i+1}^{m}\left(w_{2i}^{-}d_i^{-}+w_{2i}^{+}d_i^{+}\right),\ldots,\\ \sum_{i=m_i+1}^{m}\left(w_{q_i}^{-}d_i^{-}+w_{qi}^{+}d_i^{+}\right)\end{array}\right\} \quad (73)$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i\in\{1,2,\ldots,m_1\},\ j\in\{1,2,\ldots,n\} \quad (74)$$

$$f_i(X)+d_i^{-}-d_i^{+}=g_i \quad i\in\{m_1+1,\ldots,m\},\ j\in\{1,2,\ldots,n\} \quad (75)$$

$$d_i^{-},d_i^{+}\ge 0,\ d_i^{-}.d_i^{+}=0 \quad i=1,2,\ldots,m \quad (76)$$

A função objetivo (73) visa minimizar os desvios indesejáveis para a realização das metas, sendo facultativa a atribuição de pesos, em (74) estão as restrições rígidas e (75) diz respeito às restrições flexíveis.

Saber & Ravindran (1993) revisaram e discutiram quatro grandes abordagens da NLGP, baseadas no Método Simplex, no Método da Busca Direta, no Método do Gradiente e em Abordagens Iterativas. Esses autores, ainda, classificaram as aplicações por áreas, como *design*, *marketing* e energia, dentre outras.

Deb (2001a, b) e Ustun & Demirtas (2008) utilizaram o Método Multiobjetivo Integrado (Integrated Multi-objective) para incorporar critérios intangíveis ao modelo matemático para problemas de seleção de fornecedores e combinaram a aplicação do Analytic Hierarchy Process (AHP) e do Analytic Network Process (ANP) (Saaty, 2006) com a otimização multiobjetivo.

Miettinen et al. (2003) desenvolveram a metaheurística híbrida NINBUS para problemas multiobjetivo não lineares, descontínuos e não convexos. Essa metaheurística permite uma interação do analista na calibragem das soluções geradas pelo método.

Deb (2001b) utilizou Algoritmos Genéticos Multiobjetivos (Multiobjective Genetic Algorithms – MOGA) para resolver problemas de programação não linear em geral. Também Taguchi et al. (2003) propuseram a utilização de algoritmos genéticos na solução de problemas de NLGP envolvendo coeficientes (da função objetivo, do vetor de RHS ou da matriz de LHS) que não são constantes e que podem variar dentro de intervalos predeterminados.

Gordon et al. (2005) desenvolveram um modelo NLGP de gestão de ativos e passivos para seguradoras de propriedades. Kuriger & Ravindran (2005) desenvolveram três métodos para resolver problemas da NLGP a partir da GP, utilizando a ordenação lexicográfica das funções objetivo e conceitos de particionamento de matrizes.

Panda (2005) propôs uma técnica de NLGP na obtenção de um lote econômico de compras em problemas com estoques de vários itens. Mais recentemente, Dhahri & Chabchoub (2007) utilizaram modelos da NLGP para a quantificação do Efeito Chicote (Bullwhip Effect) em Cadeias de Suprimentos (Supply Chain), com base em Modelos Autorregressivos Integrados de Média Móvel (Auto Regressive Integrated Moving Average – ARIMA).

3. Goal Programming sob incerteza

Problemas reais de decisão, como os relacionados ao planejamento agregado de produção, são tipicamente incertos (Wang & Liang, 2004). Dessa forma, os modelos de otimização sob incerteza são utilizados para que o impacto das variáveis aleatórias (com distribuições de probabilidades conhecidas) vinculadas à avaliação de riscos seja considerado de forma direta na modelagem (Joshi, 1995; Diwekar, 2002; Sahinidis, 2004).

Uma forma de avaliar as incertezas dos parâmetros de entrada de um modelo é utilizar técnicas da Análise de Sensibilidade (AS), que consistem na análise da perturbação dos parâmetros de entrada, avaliando a estabilidade da solução com relação à factibilidade e à otimalidade (Paiva, 2009).

Além dos modelos a seguir descritos, há outros modelos disponíveis para tratar a incerteza, como, por exemplo, os Modelos de Otimização Estocástica Robusta e Otimização Robusta (Mulvey et al., 1995; Ben-Tal & Nemirovski, 1998, 2000; Bertsimas & Sim, 2003; Bertsimas & Thiele, 2006). Tais modelos têm sido adotados com excelentes resultados, como pode ser constatado nos trabalhos de Paiva (2009), Paiva & Morabito (2011) e Munhoz & Morabito (2012).

3.1. *Stochastic Goal Programming*

Geralmente, admite-se que os gestores podem e sabem escolher os valores das metas associadas aos objetivos de um problema de tomada de decisão, no entanto, muitas vezes, esses objetivos podem incorporar aspectos estocásticos, tornando o problema mais complexo, conforme apontado por Aouni et al. (2005). Para essas situações, esses autores propuseram modelos de Programação por Metas estocástica (Stochastic Goal Programming – SGP):

$$Max f\ (X) \tag{77}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{78}$$

$$X \geq 0 \tag{79}$$

sendo que $\tilde{b}$ denota o vetor m-dimensional estocástico dos RHS com distribuição de probabilidade normal.

Uma formulação alternativa descrita por Abdelaziz et al. (2007), Bravo & Gonzalez (2009) e Aouni & Torre (2010) é:

$$\underset{x \in X}{Min} \sum_{i=1}^{n} \left(d_i^+ + d_i^- \right) \tag{80}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \tilde{d}_i^- - \tilde{d}_i^+ = \tilde{g}_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{81}$$

$$\tilde{d}_i^-, \tilde{d}_i^+ \geq 0, \tilde{d}_i^- . \tilde{d}_i^+ = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{82}$$

sendo que as metas $\tilde{g}_i$ dos RHS têm distribuição de probabilidades normal $N(\mu_i\ ;\ \sigma^2)$, com μ_i e σ^2 conhecidos.

Para detalhes de aplicações dos modelos SGP, consultar Martel & Aouni (1998), Abdelaziz et al. (2007), Bravo & Gonzalez (2009), Aouni & Torre (2010). Uma opção (linear) aos modelos SGP seria utilizar os modelos de FGP (Yaghoobi & Tamiz, 2007; Jamalnia & Soukhakian, 2009), pois esses modelos são de fácil implementação computacional quando comparados aos modelos SGP e podem ser resolvidos por *softwares* de programação matemática de uso bem disseminado.

Em contrapartida, os modelos SGP exigem algoritmos específicos de otimização, sobretudo o desenvolvimento de heurísticas para tratar as complexas relações probabilísticas envolvidas. Esses modelos SGP têm sido empregados com maior frequência na área financeira.

Alternativamente poderia ser feita a substituição de modelos SGP por modelos de otimização estocástica robusta ou modelos de otimização robusta (Mulvey et al., 1995; Ben-Tal & Nemirovski, 1998, 2000; Bertsimas & Sim, 2003; Bertsimas & Thiele, 2006; Paiva & Morabito 2011; Munhoz & Morabito 2012), nos quais trabalha-se com modelos lineares.

3.2. *Fuzzy Goal Programming*

Chang (2007) comenta que em problemas reais podem existir níveis imprecisos de metas para os objetivos. Para fazer frente a tais imprecisões ou subjetividades, Martel & Aouni (1998) propuseram o modelo Fuzzy Goal Programming – FGP.

Conforme Zadeh (1965), a teoria dos conjuntos Fuzzy é baseada na extensão da definição clássica de um conjunto, onde cada elemento de um universo *X* pertence ou não a um conjunto *A*, com certo grau de adesão ou pertinência.

Aouni et al. (2009) investigaram a aplicação específica de modelos GP com os conjuntos Fuzzy. A formulação matemática fica mais simples e eficiente, necessitando de menos restrições adicionais e da solução de subproblemas, conforme modelo proposto por Martel & Aouni (1998):

$$\text{Min}\,\lambda \tag{83}$$

s.a:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j / \Delta_i\right) - d_i^+ + d_i^- = g_i / \Delta_i, \quad i = 1,2,...,p. \tag{84}$$

$$\lambda + d_i^- + d_i^+ \le 1, \quad i = 1,2,...,p. \tag{85}$$

$$Ax \le c \tag{86}$$

$$\lambda, d_i^+, d_i^-, x_j \ge 0, \quad d_i^+.d_i^- = 0, j = 1, 2,...,n \text{ e } i = 1,\ 2,...,p \tag{87}$$

sendo Δ_i o desvio em relação à meta g_i, cujo valor é subjetivamente escolhido pelos gestores.

Esse modelo incorpora formulação linear equivalente à Função de Pertinência (Membership) adotada por Hannan (1981a) e que está representada nas Figuras 1-3 e pelas expressões (88) a (91):

$$\text{Função de Pertinência} = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le g_i - \Delta_i; & (88) \\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - (g_i - \Delta_i)\right) / \Delta_i \quad se \quad g_i - \Delta_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le g_i; & (89) \\ \left(g_i + \Delta_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) / \Delta_i \quad se \quad g_i - \Delta_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le g_i + \Delta_i & (90) \\ 0 \ \ \text{se} \ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge g_i + \Delta_i & (91) \end{cases}$$

Zimmermann (1988) usou números Fuzzy triangulares para caracterizar valores linguísticos e Liang & Wang (1993) justificam o uso de funções triangulares Fuzzy, pois elas refletem bem a imprecisão dos dados avaliados, especialmente em situações em que uma avaliação quantitativa não é possível.

Aouni et al. (2009) mostraram aplicações de números triangulares Fuzzy que validam e justificam a adoção de tal método em conjunto com os modelos de GP. Embora existam críticas como, por exemplo, as de Ignizio (1982) e Martel & Aouni (1998), o uso da função de pertinência triangular ou também da trapezoidal é comum em modelos FGP (Jamalnia & Soukhakian, 2009).

Segundo Yaghoobi & Tamiz (2007) e Jamalnia & Soukhakian (2009), há três tipos mais comuns de funções de pertinência: quando se trabalha com números triangulares Fuzzy (Figuras 1 a 3), com as metas (*goals*) representadas por (92) a (94) e com as expressões (95) a (97), mostrando as respectivas formulações Fuzzy:

$$G_k(x) \tilde{\le} g_k, \ k = m+1,...,n \tag{92}$$

$$G_k(x) \tilde{\ge} g_k, \ k = m+1,...,n \tag{93}$$

$$G_k(x) \cong g_k, \ k = n+1,...,l \tag{94}$$

$$\mu_{Zk}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad G_k(x) \le g_k \\ \dfrac{U_k - G_k(x)}{U_k - g_k} & \text{se} \quad g_k \le G_k(x) \le U_k \qquad k = 1,...,\ m \\ 0 & \text{se} \quad G_k(x) \ge U_k \end{cases} \tag{95}$$

$$\mu_{Zk}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \ G_k(x) \ge g_k \\ \dfrac{G_k(x) - L_k}{g_k - L_k} & \text{se} \ \ L_k \le G_k(x) \le g_k, \quad k = m+1,...,\ n \\ 0 & \text{se} \quad G_k(x) \le L_k \end{cases} \tag{96}$$

$$\mu_{Zk}(x) = \begin{cases} 0 & \\ \dfrac{U_k - G_k(x)}{U_k - g_k} & \text{se} \quad L_k \le G_k(x) \le g_k \\ \dfrac{U_k - G_k(x)}{U_k - g_k} & \text{se} \quad g_k \le G_k(x) \le U_k \\ 0 & \text{se} \quad G_k(x) \ge U_k \end{cases} \quad k = n+1,...,l \tag{97}$$

Adotando-se a abordagem de Yaghoobi & Tamiz (2007), tem-se uma nova formulação FGP com base no modelo Minmax GP:

$$Min\,D \tag{98}$$

s.a:

$$\frac{1}{\Delta_{iL}} d_i^- + \frac{1}{\Delta_{iR}} d_i^+ \le \text{D}, \quad i = 1,...,K \tag{99}$$

$$f_i(X) + d_i^- \text{-} d_i^+ = g_i, \quad i = 1,2,...,K \tag{100}$$

$$D \le 1 \tag{101}$$

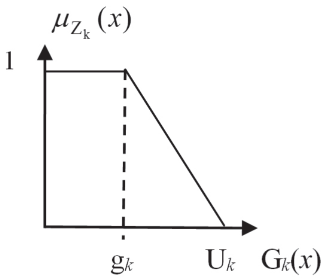

Figura 1. Fuzzy A. $G_k(x) \tilde{\leq} g_i$

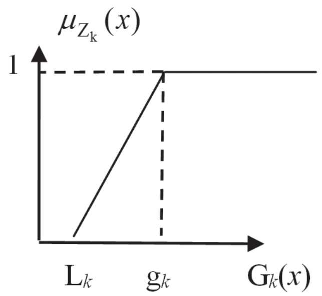

Figura 2. Fuzzy B. $G_k(x) \tilde{\geq} g_i$

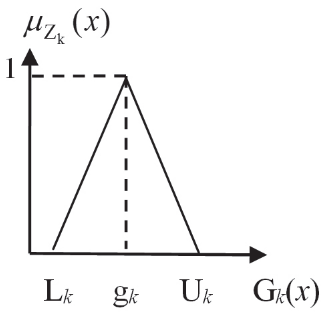

Figura 3. Fuzzy C. $G_k(x) \cong g_i$

$$D, d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ d_i^-.d_i^+ = 0, \quad i = 1, ..., K \tag{102}$$

$$X \in C_s \tag{103}$$

Segundo Yaghoobi & Tamiz (2007), na solução ótima de cada modelo de GP, apenas um dos d_i^-, d_i^+ é maior que zero. Nos modelos propostos por Romero (2001, 2004) acrescenta-se $D \leq 1$, com $\alpha_i = \frac{1}{\Delta_{iL}}$ e $\beta_i = \frac{1}{\Delta_{iR}}$, assegurando-se que na solução ótima tenha-se $d_i^- \leq \Delta_{iL}$ e $d_i^+ \leq \Delta_{iR}$. O trabalho de Yaghoobi & Tamiz (2007) é uma extensão do modelo de Romero (2004) para resolver problemas FGP, utilizando como base o modelo Minmax GP.

Os objetivos Fuzzy A (Figura 1) e B (Figura 2) podem ser tratados sem muitas dificuldades, sendo o objetivo Fuzzy B um caso especial da meta Fuzzy C (Figura 3), no qual $\Delta_{iR} = \infty$. Dessa forma, as restrições (99) e (100) para o objetivo Fuzzy B se alteram (Yaghoobi & Tamiz, 2007), como em (104) a (107):

$$\frac{1}{\Delta_{iL}} d_i^- \leq D \tag{104}$$

$$f_i(X) + d_i^- \geq b_i \tag{105}$$

$$\frac{1}{\Delta_{iR}} d_i^+ \leq D \tag{106}$$

$$(AX)_i + d_i^+ \geq b_i \tag{107}$$

No modelo proposto por Yaghoobi & Tamiz (2007), $D \leq 1$ é um limitante para D e uma alternativa é substituir D por $\lambda = 1 - D$ e como $D \leq 1$ e $1 - D \geq 0$, $\lambda \geq 0$ deve ser adicionado ao modelo. Além disso, Min $(1 - \lambda)$ pode ser substituído por Maxλ.

Consequentemente, pode-se resolver o modelo FGP tomando-se como base o modelo da abordagem Minmax GP, conforme expresso em (108) a (116):

$$Max\ \lambda \tag{108}$$

s.a:

$$f_i(X) - d_i^+ \leq b_i \quad i = 1, 2, ..., i_0 \tag{109}$$

$$f_i(X) + d_i^- \geq b_i, \quad i = i_0 + 1, ..., j_0 \tag{110}$$

$$f_i(X)_i \ + d_i^- - d_i^+ = b_i, \quad i = j_0 + 1, ..., K \tag{111}$$

$$\lambda + \frac{1}{\Delta_{iR}} d_i^+ \leq 1\ , \quad i = 1, ..., i_0 \tag{112}$$

$$\lambda + \frac{1}{\Delta_{iL}} d_i^- \leq 1\ , \quad i = i_0 + 1, ..., J_0 \tag{113}$$

$$\lambda + \frac{1}{\Delta_{iL}} d_i^- + \frac{1}{\Delta_{iR}} d_i^+ \leq 1, \quad i = j_0 + 1, ..., K \tag{114}$$

$$\lambda, d_i^-, d_i^+ \geq 0, d_i^-.d_i^+ = 0, \quad i = 1, ..., K \tag{115}$$

$$X \in C_s \tag{116}$$

Outras abordagens para a FGP foram propostas por: Narasimhan (1980, 1981), Hannan (1981a, b), Yang et al. (1991), Mohamed (1997), Wang & Fu (1997), Hayashi (1998), Kim & Whang (1998), Romero (2001, 2004), Jones & Barnes (2000), Pal, Moitra & Maulik (2003), Vitoriano & Romero (1999), Wang & Liang (2004), Biswas & Pal (2005), Aköz & Petrovic (2007), Jamalnia & Soukhakian (2009), Özcan & Toklu (2009), Kumar et al. (2004), Yaghoobi & Tamiz

(2007), Aouni et al. (2009), Liang (2010), Arenas-Parra et al. (2010) e Chen & Xu (2012).

Silva et al. (2010a, 2012d) aplicaram o modelo FGP, proposto por Yaghoobi & Tamiz (2007), para resolver um problema de grande porte em uma usina sucroalcooleira com bons resultados práticos, isto é, a determinação de planos de produção e colheita de cana viáveis e eficientes a um custo computacional aceitável. O trabalho teve o objetivo de incorporar as incertezas presentes nos processos sucroenergéticos como, por exemplo, o preço dos produtos, as condições de produção e a cogeração de energia elétrica. Os autores comentaram que o modelo FGP permitiu incorporar as incertezas em um problema real e de grande porte.

A abordagem por FGP mostrou-se mais simples de ser implementada computacionalmente do que o modelo de Otimização Estocástica Robusta (OER) proposto por Mulvey et al. (1995) e adotado por Paiva (2009) e Paiva & Morabito (2011), pois não há a necessidade de se incorporar cenários, o que aumenta consideravelmente o porte do modelo. Adicionalmente, outra vantagem do modelo FGP é que nele não há a necessidade de se calibrar parâmetros, como ocorre no uso da OER – no qual o analista deve determinar o vetor de probabilidades de ocorrência de cada cenário, o fator de penalização dos desvios da função objetivo para cada cenário e o fator de ajuste da otimalidade para cada cenário.

Destaque-se, ainda, que os modelos de OER requerem, além da calibragem de alguns parâmetros, um bom conhecimento de técnicas estatísticas (Ben-Tal & Nemirovski, 1998, 2000; Bertsimas & Sim, 2003; Bertsimas & Thiele, 2006; Munhoz & Morabito, 2012).

Já Silva et al. (2010a, 2012d), que aplicaram o modelo FGP em problemas reais de planejamento agregado em usinas sucroalcooleiras, comentaram que esse modelo proporcionou uma maior interação dos gestores da usina com os analistas, notadamente na estimação dos níveis (imprecisos) das metas a serem incorporadas na modelagem.

3.3. *Multi-Choice Goal Programming*

O modelo de Programação por Metas com Múltiplas Escolhas (Multi-Choice Goal Programming – MC-GP) foi desenvolvido por Chang (2007) para tratar situações em que há vários valores possíveis de metas (conhecidos como níveis de aspiração) para os objetivos. O modelo MC-GP avalia as incertezas nas constantes associadas às limitações de recursos (RHS) nas restrições, sendo expresso por (117) a (118):

$$Min \sum_{i=1}^{n} \left| f_i(X) - g_{i\,1} \text{ ou } g_{i2} \text{ ou....ou } g_{im} \right| \quad (117)$$

s.a:

$$X \in F \quad (\text{conjunto de soluções viáveis}) \quad (118)$$

Uma formulação alternativa está em (119) a (125), conforme proposto também por Chang (2007):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} \left(d_i^+ + d_i^- + n_i^+ + n_i^- \right) \quad (119)$$

s.a:

$$f_i(X) + d_i^+ - d_i^- = \phi_i, \quad i = 1,2,...,n, \quad (120)$$

$$\phi_i = g_{i\,j}.S_{i\,j}, \quad i = 1,2,...,n. \quad (121)$$

$$\frac{1}{g_i max - g_i min} \phi_i + n_i^- - n_i^+ = \frac{g_i max \text{ ou } g_i min}{g_i max - g_i min}, i = 1,2,...,n. \quad (122)$$

$$S_{i\,j}(A) \in R_i(x), \quad i = 1,2,...,n \quad (123)$$

$$d_i^+, d_i^-, n_i^+, n_i^- \geq 0, d_i^+.d_i^- = 0, n_i^+.n_i^- = 0 \qquad i = 1,...,n \quad (124)$$

$$X \in F\,(F \text{ é um conjunto de soluções viáveis}) \quad (125)$$

sendo S_{ij} (A) uma série binária vinculada à meta g_i; R_i (x), as restrições associadas às limitações dos recursos; e $d_i^+, d_i^-, n_i^+, n_i^-$, as variáveis de desvio para mais e para menos vinculadas às metas ϕ_i e g_i, respectivamente.

Uma observação importante com relação à restrição (122) – que envolve a escolha entre as variáveis $g_i max$ ou $g_i min$ para ser o seu RHS – é que essa decisão depende do que se deseja para a meta analisada: se a meta é do tipo "quanto mais melhor", como é o caso de lucros, usa-se o $g_i max$ e, caso contrário, usa-se o $g_i min$.

Chang (2008) propôs, também, um modelo de Programação por Metas com Múltiplas Escolhas Revisada (Revised Multi-Choice GP – RMC-GP) que substitui a necessidade de variáveis binárias requeridas pelo modelo MC-GP incorporando variáveis contínuas, conforme (126) a (131):

$$Min \sum_{i=1}^{n} \left[w_i \left(d_i^+ + d_i^- \right) + \alpha_i \left(n_i^+ + d_i^- \right) \right] \quad (126)$$

s.a:

$$f_i(x) - d_i^+ + d_i^- = y_i, \; i = 1,2,...,n \quad (127)$$

$$y_i - n_i^+ + n_i^- = g_i^{\max} \text{ ou } g_i^{\min} \quad i = 1,2,...,n \quad (128)$$

$$g_i^{\min} \leq y_i \leq g_i^{\max} \quad (129)$$

$$d_i^+, d_i^-, n_i^+, n_i^- \geq 0, d_i^+.d_i^- = 0, n_i^+.n_i^- = 0, i = 1,2,...,n \quad (130)$$

$$X \in F(\text{conjunto de soluções viáveis})\ X\ livre \quad (131)$$

sendo que a variável y_i define o espaço contínuo para a meta g_i.

A principal diferença desse modelo em relação ao modelo MC-GP está no fato de que os níveis de aspirações das limitações estão definidos em espaços contínuos, conforme restrição (129).

Chang (2010) ilustra, para problemas simples de pequeno porte, como resolver problemas multiestágios, multiprodutos e multiperíodos utilizando o modelo RMC-GP. Tanto o modelo MC-GP quanto o modelo RMC-GP são métodos novos de GP e, portanto, não há muita literatura disponível. Para mais detalhes, consultar Silva et al. (2010b, 2013a, b), Chang (2007, 2008, 2010) e Liao & Kao (2010.

Em outra abordagem, Ustun (2012) propõe agregar uma função cônica escalonada (Scalarizing Function) ao modelo MC-GP e destaca três contribuições do seu trabalho:

(1) A formulação alternativa permite que o tomador de decisão defina os níveis de multiescolha de aspiração para cada meta;

(2) A formulação proposta reduz restrições auxiliares e variáveis adicionais em relação ao modelo MC-GP; e

(3) O modelo proposto garante a obtenção de uma solução eficiente.

Já Bankain-Tabrizi et al. (2012) combinaram a lógica Fuzzy com a MC-GP, criando o modelo Fuzzy Multi-Choice Goal Programming (FMC-GP), validado com exemplos numéricos simples.

Silva et al. (2013a) desenvolveram uma nova aplicação para o modelo Multi-Choice com a incorporação de variáveis inteiras e mistas, numa aplicação real no setor sucroenergético brasileiro.

3.4. *Multi-Segment Goal Programming*

O modelo de Programação por Metas com Múltiplos Segmentos (Multi-Segment Goal Programming – MS-GP) foi desenvolvido por Liao (2009) e é derivado do modelo MC-GP proposto por Chang (2007). A principal diferença entre esses modelos está no contexto em que se considera a incerteza: o MC-GP considera incertezas nos RHS e o MS-GP considera incertezas nos LHS. O modelo MS-GP pode ser expresso por (132) a (134):

$$Min \sum_{i=1}^{n} \left(d_i^- + d_i^- \right) \quad (132)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{n} S_{ij} x_i + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1, 2, 3, \ \ j = 1, 2, 3 \quad (133)$$

$$d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^+ . d_i^- = 0, i = 1,2,3 \ \ X \in F \ (\text{conjunto de soluções viáveis}) \quad (134)$$

sendo S_{ij} os coeficientes das variáveis de decisão correspondentes ao nível (valor) estabelecido para o *j*-ésimo segmento da *i*-ésima meta g_i. As demais variáveis são as mesmas já definidas nos modelos anteriores.

Devido ao fato de o modelo MS-GP ter sido criado recentemente, há pouca literatura a respeito, recomendando-se consultar a obra de Liao (2009) para detalhes.

De toda forma, como o modelo MS-GP avalia as incertezas nos LHS, não se recomenda a sua adoção para problemas de grande porte, pois a implementação é muito complexa do ponto de vista computacional. A dificuldade decorre do fato de que a inclusão da incerteza em cada LHS torna o modelo não linear misto, isto é, há um produto entre as variáveis auxiliares binárias com as variáveis de decisão originais. Ilustrando esse problema, suponha-se um modelo com 10 mil coeficientes na matriz tecnológica, não sendo difícil imaginar a dificuldade de tratar as 10 mil variáveis auxiliares binárias adicionais num ambiente de otimização não linear misto.

Recentemente Chang et al. (2012a) desenvolveram o Modelo de Programação por Metas com Múltiplos Segmentos Revisada (Revised Multi-Segment Goal Programming – RMSGP) que evita a necessidade de variáveis de controle binárias. A ideia básica desse modelo é restringir a variação dos LHS num intervalo contínuo, enquanto o modelo MS-GP restringe a variação dos LHS num intervalo discreto.

Também há pouco tempo, Chang et al. (2012b) propuseram o Modelo de Programação por Metas com Múltiplos Coeficientes (Multi-Coefficients GP – MCGP) com o mesmo propósito do RMSGP, mas utilizando variáveis auxiliares discretas vinculadas a cada LHS, incorporando as incertezas.

Visando ilustrar a complexidade destes modelos, foi incorporado ao texto o exemplo de Liao (2009), com três funções objetivo conforme (135) - (137) e três restrições conforme (138) - (140):

Nessas funções, alguns coeficientes estão condicionados a níveis de aspiração, ou seja, o coeficiente x_1 da função g_1 pode ter um valor de 3 ou 6, e assim sucessivamente para as demais funções.

$$(g_1) \quad (3\ ou\ 6)x_1 + 2x_2 + x_3 = 115 \quad (135)$$

$$(g_2) \quad 4x_1 + (5\ ou\ 9)x_2 + 2x_3 = 80 \quad (136)$$

$$(g_3) \quad 3{,}5x_1 + 5x_2 + (7\ ou\ 10)x_3 = 110 \quad (137)$$

$$x_2 + x_3 \geq 9 \quad (138)$$

$$x_2 \geq 5 \tag{139}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21 \tag{140}$$

O modelo MSGP teria a seguinte estrutura algébrica, conforme as expressões (141) a (148).

$$Min\,Z = d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- + d_3^+ + d_3^- \tag{141}$$

$$\left(3b_1 + 6\left(1 - b_1\right)\right)x_1 + 2x_2 + x_3 + d_1^- - d_1^+ = 115 \tag{142}$$

$$4x_1 + \left(5b_2 + 9\left(1 - b_2\right)\right)x_2 + 2x_3 + d_2^- - d_2^+ = 80 \tag{143}$$

$$3,5x_1 + 5x_2 + \left(7b_3 + 10\left(1 - b_3\right)\right)x_3 = 110 \tag{144}$$

$$x_2 + x_3 \geq 9 \tag{145}$$

$$x_2 \geq 5 \tag{146}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21 \tag{147}$$

Pode-se verificar que há um aumento considerável na complexidade desse último modelo, mesmo tratando-se de um modelo de pequeno porte. Como em problemas reais pode haver milhares ou milhões de variáveis, a necessidade de se associar a cada uma delas uma variável auxiliar binária tornaria o processo de modelagem exaustivo e com um custo computacional que limitaria consideravelmente sua adoção, pois os gestores usualmente precisam de informações disponíveis em um tempo aceitável para a tomada de decisão. Nesses casos, os Modelos de Otimização Estocástica Robusta e Otimização Robusta são mais indicados, pois permitem incorporar a incerteza na matriz tecnológica sem aumentar a complexidade original do modelo.

Nesse contexto, Silva et al. (2012a) estenderam a estrutura algébrica do modelo MSGP para incorporar a incerteza em toda a matriz tecnológica (parâmetros do modelo), obtendo bons resultados num tempo computacional aceitável.

4. Considerações finais

Este trabalho procurou identificar os principais modelos determinísticos e sob incerteza da GP, procurando apontar suas vantagens e desvantagens com vistas à sua aplicação a problemas complexos (de grande porte) de decisão.

As principais conclusões são:

- Com relação à escolha do modelo de GP determinística, este trabalho constatou, por meio de uma ampla pesquisa bibliográfica, e com apoio, principalmente, dos trabalhos de Caballero et al. (2009), Romero (2004), Yaghoobi & Tamiz (2007), Jamalnia & Soukhakian (2009), Silva et al. (2013a, b), que os modelos mais utilizados são o WGP, o LGP e o Minmax GP, desta forma, caso o gestor deseje aplicar um modelo de GP determinística, o indicado seriam os modelos estendidos, EGP e ELGP, pois agregam todas as potencialidades dos modelos GP determinísticos em um único modelo;
- Ainda com respeito aos modelos determinísticos, os modelos GPDEA-CCR e GPDEA-BCC proporcionaram uma melhor discriminação entre as DMUs que os modelos tradicionais CCR e BCC, notadamente quando o número de DMUs é inferior a três vezes a soma do número de *inputs* e *outputs* (Cooper et al., 2006, 2007). Destaque-se que esses modelos da GPDEA foram recentemente aplicados no Brasil em áreas variadas, com bom desempenho (Silva et al., 2011a, 2012b, c, 2013c). Como exemplo desses últimos modelos, Silva et al. (2013c) utilizaram a lógica Fuzzy nos modelos GPDEA visando tratar a incerteza na análise de eficiência de DMUs;
- Quanto aos modelos sob incerteza, o modelo MS-GP incorpora as incertezas nos RHS, ou seja, em cada coeficiente tecnológico, o que, conforme já mencionado, pode inviabilizar seu uso em problemas reais de grande porte. Entretanto, uma generalização dessa formulação que incorpora a incerteza em toda a matriz tecnológica, isto é, nos parâmetros do modelo, como proposto por Silva et al. (2012a), mostrou-se viável computacionalmente, mesmo em problemas complexos;
- O modelo MC-GP original, que engloba conceitos da lógica Fuzzy sem muitas aplicações, motivou outros autores a proporem modelagens alternativas (revisadas) (Chang, 2008; Ustun, 2012; Bankain-Tabrizi et al., 2012), mas que ainda carecem de testes mais adequados;
- Como alternativa ao modelo MC-GP, Silva et al. (2013a) realizaram uma mudança na sua estrutura algébrica para tratar problemas inteiros e mistos. O novo modelo, denominado MCMI-GP, foi aplicado num problema real em uma usina do setor sucroenergético que levou à obtenção de resultados aderentes e interessantes com respeito aos cenários analisados;
- Para as situações em que a incerteza tem papel importante, recomenda-se o modelo FGP para avaliar a incerteza da estimação das limitações (RHS). Já os modelos MC-GP revisados foram investigados e testados em problemas reais de grande porte, inclusive com a incorporação da teoria Fuzzy (Silva, 2013; Silva et al., 2010a, 2012d, 2013a, b), com resultados que satisfizeram os gestores da usina sucroalcooleira onde se deu a aplicação;
- Para tratar as incertezas na matriz tecnológica (parâmetros do modelo), recomenda-se adotar o

modelo GP com Múltiplos Segmentos, com base em Silva et al. (2012a), que incorporaram a incerteza relacionada às decisões de planejamento na colheita de cana-de-açúcar.

Referências

Abdelaziz, F. B., Aouni, B., & Fayedh, R. E. (2007). Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research, 177*, 1811-1823. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.021

Adler, N., Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European Journal of Operational Research, 140*, 249-265. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00068-1

Ahern, R., & Anandarajah, G. (2007). Railway projects prioritisation for investiment: Application of goal programming. *Transport Policy, 14*, 70-80. http://dx.doi.org/10.1016/j.tranpol.2006.10.003

Aköz, O., & Petrovic, D. (2007). A fuzzy goal programming method with imprecise goal hierarchy. *European Journal of Operational Research, 181*(3), 1427-1433. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.11.049

Abensur, E. O. (2012). Um modelo multiobjetivo de otimização aplicado ao processo de orçamento de capital. *Gestão & Produção, 19*(4), 747-758. http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2012000400007

Aouni, B., Abdelaziz, F. B., & Martel, J. M. (2005). Decision-maker's preferences modeling in the stochastic goal programming. *European Journal of Operational Research, 162*, 610-618. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2003.10.035

Aouni, B., & Kettani, O. (2001). Goal programming model: A glorious history and a promising future. *European Journal of Operational Research, 133*, 225-231. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00294-0

Aouni, B., Martel, J. M., & Hassaine, A. (2009). Fuzzy goal Programming model: Na overview of the current state-of-the Art. *Microelectronics and Reliability, 33*, 63-80.

Aouni, B., & Torre, L. T. (2010). A generalized stochastic goal programming model. *Applied Mathematics and Computation, 215*, 4347-4357. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2009.12.065

Appolinário, F. (2006). *Metodologia da ciência:* filosofia e prática da pesquisa. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning.

Arenas-Parra, M., Bilbao-Terol, A., Pérez-Gladish, B., & Uría, M. V. R. (2010). A new approach of Romero's extended lexicographic goal programming: fuzzy extended lexicographic goal programming. *Soft Computing, 14*, 1217-1226. http://dx.doi.org/10.1007/s00500-009-0533-y

Athanassopoulos, A. D. (1995). Goal Programming & Data envelopment analysis (GoDEA) for target-based multi-level planning: Allocating central grants to the Greek local authorities. *European Journal of Operational Research, 87*, 535-550. http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(95)00228-6

Baker, R. C., & Talluri, S. (1997). A closer look at the use of data envelopment analysis for technology selection. *Computers and Industrial Engineering, 32*, 101-108. http://dx.doi.org/10.1016/S0360-8352(96)00199-4

Bal, H., Örkcü, H. H., & Çelebioğlu, S. (2008). A new method based on the dispersion of weights in data envelopment analysis. *Computers and Industrial Engineering, 54*, 502-512. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2007.09.001

Bal, H., Örkcü, H. H., & Çelebioğlu, S. (2010). Improving the discrimination power and weights dispersion in the data envelopment analysis. *Computers and Operations Research, 37*, 99-107. http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.03.028

Bankain-Tabrizi, B., Shahanaghi, K., & Jabalameli, M. S. (2012). Fuzzy multi-choice goal programming. *Applied Mathematical Modelling, 35*(4), 1415-1420.

Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science, 30*, 1078-1092. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078

Beale, E. M. L. (1955). On minimizing convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B, 17*(2), 173-184.

Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research, 4*, 769-805. http://dx.doi.org/10.1287/moor.23.4.769

Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated With Uncertain Data. *Mathematical Programming, 88*, 411-424. http://dx.doi.org/10.1007/PL00011380

Bertsimas, D., & Sim, M. (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming. Series B, 98*(1-3), 49-71. http://dx.doi.org/10.1007/s10107-003-0396-4

Bertsimas, D., & Thiele, A. (2006). A robust optimization approach to inventory theory. *Operations Research, 54*(1), 150-168. http://dx.doi.org/10.1287/opre.1050.0238

Biswas, A., & Pal, B. B. (2005). Application of fuzzy goal programming technique to land use planning in agricultural system. *Omega, 33*, 391-398. http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2004.07.003

Bravo, M., & Gonzalez, I. (2009). Applying stochastic goal programming: a case study on water use planning. *European Journal of Operational Research, 196*, 1123-1129. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.04.034

Caballero, R., Gómez, T., & Ruiz, F. (2009). Goal Programming: Realistic Targets for the near future. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, *16*, 79-110. http://dx.doi.org/10.1002/mcda.442

Chang, C.-T. (2000). An efficient linearization approach for mixed integer problems. *European Journal of Operational Research, 123*, 652-659. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00106-X

Chang, C.-T. (2004). On The Mixed Binary Goal Programming Problems. *Applied Mathematics and Computation, 159*, 759-768. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2003.11.001

Chang, C.-T. (2007). Multi-Choice Goal Programming. *The International Journal of Management Science, 35*, 389-396.

Chang, C.-T. (2008). Revised Multi-Choice Goal Programming. *Applied Mathematical Modelling, 32*, 2587-2595. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2007.09.008

Chang, C.-T. (2010). Revised multi-choice goal programming for multi-period, multi-stage inventory controlled supply chain model with popup stores in Guerrilla marketing. *Applied Mathematical Modelling, 58*, 3586-3598.

Chang, C.-T., Chen, H-M., & Zhuang, Z.-Y. (2012a). Revised multi-segment goal programming: Percentage goal programming. *Computers & Industrial Enginnering, 63*, 1235-1242. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2012.08.005

Chang, C.-T., Chen, H-M., & Zhuang, Z.-Y. (2012b). Multi-coefficients goal programming. *Computers & Industrial Enginnering, 62*, 616-623. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2011.11.027

Chang, C.-T., & Lin, T. C. (2009). Interval goal programming for S-Shaped penalty function. *European Journal of Operational Research, 199*, 9-20. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.10.009

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1959). Chance–constrained programming. *Management Science, 6*(1), 73-79. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.6.1.73

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1961). *Management Model and Industrial Application of Linear Programming, 1*. New York: Wiley.

Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, *2*, 429-444. http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8

Charnes, A., Cooper, W. W., Huang, Z. M., & Sun, D. B. (1990). Polyhedral cone-ratiomodels with an illustrative application to large commercial banks. *Journal of Econometrics, 46*, 73-91. http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076(90)90048-X

Chen, A., & Xu, X. (2012). Goal programming approach to solving network design problem with multiple objectives and demand uncertainty. *Expert Systems with applications, 39*(4), 4160-4170. http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2011.09.118

Cooper, W. W. (2005). Origins, Uses of, and Relations Between Goal Programming and Data Envelopment Analysis. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 13*, 3-11. http://dx.doi.org/10.1002/mcda.370

Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2006). *Introduction to Data Envelopment Analysis and its uses:* with DEA-Solver software and references. New York: Springer.

Cooper, W. W., Sieford, L. M., & Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis:* A comprehensive text with models, application, references and DEA-Solver Software (2nd ed.). New York: Springer Science; Business Media.

Cunha, V., & Caixeta-Filho, J. C. (2002). Gerenciamento da Coleta de Resíduos Sólidos Urbanos: Estruturação e Aplicação de Modelo Não-Linear De Programação Por Metas. *Gestão & Produção, 9*, 143-161. http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2002000200004.

Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science, 1*(3), 197-206.

Deb, K. (2001a). *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons.

Deb, K. (2001b). Nonlinear goal programming using multi-objective genetic algorithms. *Journal of the Operational Research Society, 52*(3), 291-302. http://dx.doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601089

Dhahri, I., & Chabchoub, H. (2007). Nonlinear goal programming models quantifying the bullwhip effect in supply chain based on ARIMA parameters. *European Journal of Operational Research, 177*(3), 1800-1810. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.065

Diwekar, U. (2002). Optimization under uncertainty. *SIAG/OPT Views-and-News, 13*(1), 1-8.

Gembicki, F. W., & Haimes, Y. Y. (1975). Approach to performance and sensitivity multiobjective optimization: Goal attainment method. *IEEE Transactions on Automatic Control, 20*, 769-771. http://dx.doi.org/10.1109/TAC.1975.1101105

Gil, A. C. (2009). *Como elaborar projetos de pesquisa* (4. ed.). São Paulo: Atlas.

Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos* (2. ed.). São Paulo: Campus.

Gordon, H., Dash, J. R., & Kajiji, N. A. (2005). Nonlinear goal programming model for efficient asset-liability management of property liability insurers. *INFOR*, 43(2), p.135-156.

Hannan, E. L. (1981a). On Fuzzy Goal Programming. *Decision Sciences, 12*, 522-531. http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-5915.1981.tb00102.x

Hannan, E. L. (1981b). Some Further Comments on Fuzzy Priorities. *Decision Sciences, 12*, 539-541. http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-5915.1981.tb00104.x

Hayashi, H. (1998). Multicriteria Aid for Agricultural Decisions Using Preference Relations: Methodology and Application. *Agricultural System, 58*, 483-503. http://dx.doi.org/10.1016/S0308-521X(98)00063-8

Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. A. (2011). Taxonomy and review of the fuzzy data Envelopment Analysis literature: Two decades in the Making. *European Journal of Operational Research, 214*, 457-472. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2011.02.001

Ignizio, J. P. (1985). *Introduction to linear goal programming*. Sage: Beverly Hills.

Ignizio, J. P. (1976). *Goal Programming and Extensions*. Lexington Books: Lexington.

Ignizio, J. P. (1978). Review of goal programming: a tool for multiobjective analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 29, 1109-1119.

Ignizio, J. P. (1982). *Linear programming in Single & Multiple-objective Systems*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs.

Ijiri, Y. (1965). *Management Goals and Accounting for Control*. North-Holland Publishing Company: Amsterdam.

Jamalnia, A., & Soukhakian, M. A. (2009). A hybrid fuzzy goal programming approach with different goal priorities to aggregate production planning. *Computers & Industrial Engineering, 56*, 1474-1486. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2008.09.010

Jones, D., & Barnes, E. M. (2000). Fuzzy composite programming to combine remote sensing and crop models for decision support in precision crop management. *Agricultural System, 65*, 137-158. http://dx.doi.org/10.1016/S0308-521X(00)00026-3

Jones, D., Mirrazavi, S. K., & Tamiz, M. (2002). Multiobjective meta-heuristics: an overview of the current state-of-the-art. *European Journal of Operational Research, 137*, 1-9. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00123-0

Jones, D. F., & Tamiz, M. (2002). Goal programming in the period 1990-2000. In M. Ehrgott & X. Gandibleux (Ed.), *Multicriteria Optimization:* State of the Art Annotated Bibliographic Survey (chapt. 3). Kluwer Academic Publisher Boston.

Joshi, R. R. (1995). A new approach to stochastic programming problems: Discrete model. *European*

Journal of Operational Research, 83, 514-529. http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(93)E0218-M

Kao, C., & Liu, S. T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopments analysis. *Fuzzy sets and systems, 133*, 427-437. http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00137-7

Kim, J. S., & Whang, K. S. (1998). A tolerance approach to the fuzzy goal programming problems with unbalanced triangular membership function. *European Journal of Operational Research, 107*, 614-624. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00363-3

Kornbluth, J. S. H. (1973). A survey goal programming. *The International Journal of Management Science, 1*, 193-205.

Kouvelis, P., & Yu, G. (1997). *Robust Discret Optimization and its Application*. London: Kluwer Academic Publisher. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-2620-6

Kumar, M., Vrat, P., & Shankar, R. (2004). A fuzzy goal programming approach for vendor selection problem in a supply chain. *Computers & Industrial Engineering, 46*, 69-85. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2003.09.010

Kuriger, G., & Ravindran, A. R. (2005). Intelligent search methods for nonlinear goal programming problems. *INFOR*, *43*(2), 79-92.

Lee, S. M. (1972). *Goal Programming for Decision Analysis.* Auerbach: Philadelphia. 387 p.

Lee, S. M., & Olson, D. L. (1999). Goal programming. In T. Gal, T. Hanne & T. Stewart, *Advances in Multicriteria Decision Making.* Boston: Kluwer Academic Publishers. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4615-5025-9_8

Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Joines, J. A., & Nuttle, H. L. W. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): A possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems, 139*, 379-394. http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00484-0

Li, X. B., & Reeves, G. R. (1999). A multiple criteria approach to data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research, 115*, 507-517. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00130-1

Liang, T. F., & Wang, M-J. (1993). Evaluating human reliability using fuzzy relation. *Microelectron*, *33*, 63-80.

Liang, T. F. (2010). Applying fuzzy goal programming to project management decisions with multiple goals in uncertain environments. *Expert System with Applications*, *37*, 8499-8507. http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2010.05.026

Liao, C. N. (2009). Formulating the multi-segment goal programming. *Computers and Industrial Engineering, 56*, 138-141. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2008.04.007

Liao, C. N., & Kao, H. P. (2010). Supplier selection model using Taguchi loss function, analytical hierarchy process and multi-choice goal programming. *Computers and Industrial Engineering, 58*, 571-577. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2009.12.004

Marins, F. A. S., Silva, A. F; Solomon, V. A. P., & Silva, G. M. (2010). Otimização multiobjetivo fuzzy no planejamento agregado da produção e distribuição em usinas de açúcar e álcool. In *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Bento Gonçalves.

Marins, F. A. S., Silva, A. F; Ribeiro, I., & Montevechi, J. A. B. (2011). Solving Real Problems in Sugar and Ethanol Milling Companies with an Extended Goal Programming Model. In *Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies* – IFORS, Melbourne.

Martel, J. M., & Aouni, B. (1998). Diverse Imprecise Goal Programming Model Formulations. *Journal of Global Optimization, 12*, 127-138. http://dx.doi.org/10.1023/A:1008206226608

Miettinen, K., Lotov, A. V., Kamenev, G. K., & Berezkin, V. E. (2003). Integration of two multiobjective optimization methods for nonlinear problems. *Optimization Methods and Software, 18*(1), 63-80. http://dx.doi.org/10.1080/1055678031000116538

Mohamed, R. H. (1997). The relationship between goal programming and fuzzy programming. *Fuzzy Sets and Systems, 89*, 215-222. http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00100-5

Mulvey, J. M., Vanderbei, R. J., & Zenios, S. A. (1995). Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research, 43*, 264-281. http://dx.doi.org/10.1287/opre.43.2.264

Munhoz, J. R., & Morabito, R. (2001). Um modelo baseado em programação linear e programação de metas para análise de um sistema de produção e distribuição de suco concentrado congelado da laranja. *Gestão & Produção, 8*, 139-159.

Munhoz, J. R., & Morabito, R. (2010). Otimização no planejamento agregado de produção em indústrias de processamento de suco concentrado congelado de laranja. *Gestão & Produção, 3*, 465-481. http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2010000300003

Munhoz, J. R., & Morabito, R. (2012). Uma abordagem de otimização robusta no planejamento agregado de produção na indústria cítrica. *Produção, 23*(2), 422-435. http://dx.doi.org/10.1590/S0103-65132012005000054

Narasimhan, R. (1980). Goal programming in a fuzzy environment. *Decision Sciences, 11*, 325-336. http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-5915.1980.tb01142.x

Narasimhan, R. (1981). Fuzzy Goal Programming: Some Comments. *Decision Sciences, 12*, 532-538. http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-5915.1981.tb00103.x

Ogryczak, W. (2001). Comments on properties of the Minmax solutions in goal programming. *European Journal of Operational Research, 132*, 17-21. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00089-8

Özcan, U., & Toklu, B. (2009). Multiple-criteria decision-making in two-sided assembly line balancing: a goal programming and a fuzzy goal programming models. *Computers and Operations Research, 36*, 1955-1965. http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2008.06.009

Paiva, R. P. O. (2009). *Modelagem do planejamento agregado da produção em usinas cooperadas do setor sucroenergético utilizando programação matemática e otimização robusta* (Tese de doutorado). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

Paiva, R. P. O., & Morabito, R. (2011). Programação estocástica robusta aplicada ao planejamento agregado da safra em usinas cooperadas do setor sucroenergético. *Gestão & Produção, 18*(4), 719-738. http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2011000400004

Pal, B. B., Moitra, B. N., & Maulik, U. (2003). A goal programming procedure for fuzzy multiobjective linear fractional programming problem. *Fuzzy Sets and Systems, 139*, 395-405. http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00374-3

Panda, S. (2005). Determination of EOQ of multiitem inventory problems through nonlinear goal programming with penalty function. *Asia-Pacific Journal of Operational*

Research, 22(4), 539-553. http://dx.doi.org/10.1142/S0217595905000728

Peterson, A. P. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science, 39*, 1261-1264. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.39.10.1261

Piewthongngam, K., Pathumnakul., S., & Setthanan, K. (2009). Application of crop growth simulation and mathematical modeling to supply chain management in the Thai sugar industry. *Agricultural System, 102*, 58-66. http://dx.doi.org/10.1016/j.agsy.2009.07.002

Pizzolato, N. D., & Gandolpho, A. A. (2012). *Técnicas de Otimização*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora.

Powell, J. G., & Premachandra, I. M. (1998). Accommodating diverse institutional investment objectives and constraints using non-linear goal programming. *European Journal of Operational Research, 105*, 447-456. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00061-1

Romero, C. (1986). A survey of generalized goal programming (1970-1982). *European Journal of Operational Research, 25*, 183-191. http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(86)90084-6

Romero, C. (2001). Extended lexicographic goal programming: a unifying approach. *Omega, 29*, 63-71. http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0483(00)00026-8

Romero, C. (2004). A general structure of achievement function for a goal programming model. *European Journal of Operational Research, 153*, 675-686. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00793-2

Saaty, T. L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology, 15*, 234-281. http://dx.doi.org/10.1016/0022-2496(77)90033-5

Saaty, T. L. (2006). Decision Making with the Analytic Network Process. *International Series in Operations Research & Management Science, 95*, 1-26. http://dx.doi.org/10.1007/0-387-33987-6_1

Saber, H. M., & Ravindran, A. (1993). Nonlinear goal programming theory and practice: a survey. *Computers and Operations Research, 20,* 275-291. http://dx.doi.org/10.1016/0305-0548(93)90004-3

Sahinidis, N. V. (2004). Optimization under uncertainty: State-of-the-art and opportunities. *Computers and Chemical Engineering*, 28, 971-983. http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2003.09.017

Schniederjans, M. J. (1995). *Goal Programming:* Methodology and Applications. Kluwer Academic Publishers: Norwell. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4615-2229-4

Sen, S., & Higle, J. L. (1999). An introductory tutorial on stochastic linear programming models. *Interfaces, 29*, 33-61. http://dx.doi.org/10.1287/inte.29.2.33

Shimizu, T. (2010). *Decisão nas Organizações*. São Paulo: Atlas.

Silva, A. F. (2009). *Modelagem do Planejamento Agregado da Produção de uma Usina Sucroalcooleira* (Dissertação de mestrado). Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

Silva, A. F. (2013). *Otimização multiobjetivo no planejamento agregado da produção e na cogeração de energia elétrica de usina do setor sucroenergético* (Tese de doutorado). Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., & Montevechi, J. A. B. (2012a). Tratamento da incerteza no planejamento da colheita de cana de açúcar utilizando um modelo de Programação por Metas Multi-escolha Revisado. In *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* – SBPO, *Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa*, Rio de Janeiro.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., & Montevechi, J. A. B. (2013a). Multi-choice mixed integer goal programming optimization in a sugar and ethanol milling company. *Applied Mathematical Modelling, 37*(1), 6146-6261. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.12.022

Silva, A. F., Marins, F. A. S., & Montevechi, J. A. B. (2013b). Aplicação de programação por metas binária: mista em uma empresa do setor sucroenergético. *Gestão & Produção, 20*(2), 321-336.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., & Santos, M. V. B. (2012b). Programação por metas e análise envoltória de dados na avaliação da eficiência de plantas mundiais de manufatura. In *Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, Bento Gonçalves.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., & Santos, M. V. B. (2013c). Programação por Metas e Análise Envoltória de Dados na Avaliação da Eficiência de Plantas Mundiais de Manufatura. *Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, 5*(2), 172-184.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., & Simões, M. V. B. (2012c). Programação por metas e análise envoltória de dados nos processos licitatórios de contratações de embarcações da Petrobrás. In *Simpósio de Engenharia de Produção* – SIMPEP, Bauru.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., Salomon, V. A. P., Montevechi, J. A. B., & Neves, S. M. (2009). Decisões por múltiplos critérios e objetivos no planejamento agregado da produção e na comercialização e distribuição de uma usina sucroalcooleira. In *Simpósio de Engenharia de Produção* – SIMPEP, Bauru.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., Salomon, V. A. P., & Silva, G. (2010a). Otimização multiobjetivo fuzzy no planejamento agregado da produção e distribuição em usinas de açúcar e álcool. In *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Bento Gonçalves.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., Silva, G., & Lopes, P. R. M. (2010b). Um modelo multiescolhas de programação de metas inteira mista para o planejamento agregado da produção em uma usina brasileira de açúcar e etanol. In *Encontro Regional de Pesquisa Operacional da Região Sudeste – ERPO*, Rio de Janeiro.

Silva, A. F., Lopes, P. R. M., & Marins, F. A. S. (2011a). Método de seleção de variedades de cana para plantio utilizando a programação de metas & Análise por Envoltória de Dados. In *Encontro Nacional de Engenharia de Produção – ENEGEP*, Belo Horizonte.

Silva, A. F., Ribeiro, I. M., Lopes, P. R. M. A., & Marins, F. A. S. (2011b). Uma Investigação Sobre os Modelos da Programação De Metas Sob Certeza e Sob Incerteza: Aplicação a Problemas de Planejamento Agregado em Usinas Sucroalcooleiras. In *Encontro Nacional de Engenharia de Produção – ENEGEP*, Belo Horizonte.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., Ribeiro, I. M., Lopes, P. R., & Montevechi, J. A. B. (2011c). Planejamento Otimizado para Colheita de Cana de Açúcar de Uma Usina Sucroalcooleira. In *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* – SBPO, Ubatuba.

Silva, A. F., Marins, F. A. S., Ferreira, U. R., & Montevechi, J. A. B. (2012d). A Fuzzy Goal Programming Model for Solving Aggregate Production-Planning Problems under uncertainty: A Case Study in a Brazilian Sugar Mill. In *Informs Conference*, Beijing.

Sueyoshi, T. (1999). DEA - discriminate analysis in the view of goal programming. *European Journal of Operational Research, 115*, 564-582. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00014-9

Taguchi, T., Yokota, T., & Gen, M. (2003). Method for solving nonlinear goal programming tasks with interval coefficients using GA. *Electronics and Communications in Japan, Part 3, 86*(4), 809-817. http://dx.doi.org/10.1002/ecjc.1145

Tamiz, M., Jones, D. F., & El-Darzi, E. (1995). A review of Goal Programming and its applications. *Annals of Operations Research, 58*, 39-53. http://dx.doi.org/10.1007/BF02032309

Tamiz, M., Jones, D., & Romero, C. (1998). Goal programming for decision making: an overview of the current state-of-the-art. *European Journal of Operational Research, 111*, 569-581. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00317-2

Ustun, O., & Demirtas, E. A. (2008). An integrated multi-objective decision-making process for multi-period lot-sizing with supplier selection. *The international Journal of management science, 36*(4), 509-521.

Ustun, O. (2012). Multi-choice goal programming formulation based on the conic scalarizing function. *Applied Mathematical Modelling, 36*(3), 974-988. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.065.

Uría, M. V. R., Caballero, R., Ruiz, F., & Romero, C. (2002). Meta-goal programming. *European Journal of Operational Research, 136*(2), 422-429.

Vitoriano, B., & Romero, C. (1999). Extended interval goal programming. *Journal of Operational Research Society, 50*, 1280-1283.

Wang, H. F., & Fu, C. C. (1997). A generalization of fuzzy goal programming with preemptive structure. *Computers Operational Research, 24*, 819-828. http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548(96)00096-2

Wang, R. C., & Liang, T. F. (2004). Projects management decisions with multiple fuzzy goals. *Construction Management and Economics, 22*, 1047-1056. http://dx.doi.org/10.1080/0144619042000241453

Wang,Y. M., & Luo, Y. (2009). A note on a new method based on the dispersion of weights in Data Envelopment Analysis. *Computes & Industrial Engineering, 56*, 1703-1707. http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2008.08.014

Wong, Y. H. B., & Beasley, J. E. (1990). Restricting weight flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society, 41*, 829-835.

Yaghin, R. G., Torabi, S. A., & Ghomi, S. M. T. F. (2012). Integrated markdown pricing and aggregate production planning in a two echelon supply chain: A hybrid fuzzy multiple objective approach. *Applied Mathematical Modelling, 36*, 6011-6030. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.01.029

Yaghoobi, M. A., & Tamiz, M. (2007). A note on article A tolerance approach to the fuzzy goal programming problems with unbalanced triangular membership function. *European Journal of Operational Research, 176*, 636-640. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.06.045

Yang, T., Ignizio, J. P., & Kim, H. J. (1991). Fuzzy programming with nonlinear membership functions: piecewise linear approximation. *Fuzzy Sets and Systems, 41*, 39-53. http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(91)90156-K

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control, 8*, 338-353. http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

Zanakis, S. M., & Gupta, S. K. (1985). A categorized bibliographic survey of goal programming. *Omega, 13*, 211-222. http://dx.doi.org/10.1016/0305-0483(85)90059-3

Zeleny, M. (1973). Compromise programming. In J. Cochrane & M. Zeleny (Ed.), *Multiple Criteria Decision Making*. Columbia: University of South Carolina Press.

Zheng, D. W., Gen, M., & Ida, K. (1996). Evolution Program for Nonlinear Goal Programming. *Computers and Industrial Engineering, 31*(4), 907-911. http://dx.doi.org/10.1016/S0360-8352(96)00262-8

Zimmermann, H. J. (1988). *Fuzzy set theory and its application*. Boston: Kluwer-Nijhoff Publishing.

Agradecimentos

À CAPES, ao CNPq e à FAPESP.

Literature review on deterministic and under uncertainty Goal Programming models

Abstract

The goal of this study was to identify the principal goal programming (GP) models in existence, analyzing the advantages and disadvantages of each model when used to treat real situations involving large, complex problems. Both deterministic GP models and those subjected to uncertainty were investigated.

Keywords

Decision making. Goal programming. Deterministic models. Models subjected to uncertainty.